

В.П. СТУЛОВ

ЛЕКЦИИ ПО ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ



В.П. СТУЛОВ

ЛЕКЦИИ ПО ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

*Рекомендовано УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебника для студентов университетов,
обучающихся по специальности "Механика"*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 531, 533

ББК 22.253

С 88

Стулов В. П. Лекции по газовой динамике: Учебник. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 192 с. — ISBN 5-9221-0213-3.

Книга содержит систематическое изложение основных вопросов современной газовой динамики. Математическое моделирование газодинамических процессов строится на базе двух независимых блоков, включающих уравнения баланса и уравнения состояния. Блок уравнений состояния формулируется на основе гипотезы о локальном термодинамическом равновесии. Рассматриваются три основные модели газовой среды: совершенный газ с постоянными теплоемкостями; двухатомный газ с релаксацией колебательной энергии молекул; химически реагирующая смесь идеальных газов.

Для студентов и аспирантов университетов, обучающихся по специальности «Механика», студентов технических вузов аэромеханического профиля, а также для астрономов и геофизиков.

Ил. 23. Библиогр. 29 назв.

Рецензенты:

профессор, член-корреспондент РАН *В. П. Коробейников*,
профессор, доктор физико-математических наук *С. А. Лосев*.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	6
Лекция 1. Введение.	7
Физические особенности среды (7). Сжимаемость (7). Роль скорости звука (9). Нелинейные волны (9). Применения в аэродинамике (11). Применения в теории газовых машин (двигатели, аэродинамические трубы) (13). Прочие приложения (14).	
Лекция 2. Многокомпонентная химически реагирующая газовая смесь. Уравнения баланса	15
Уравнение сохранения i -й компоненты (15). Уравнение сохранения импульса (17). Уравнение энергии (18). Понятие энтропии, уравнение производства энтропии (20).	
Лекция 3. Уравнение состояния	22
Гипотеза об уравнении состояния (22). Вывод уравнения сохранения энтропии (23). «Силы» и «потoki», их линейная связь (25).	
Лекция 4. Совершенный газ с постоянными теплоемкостями	27
Однородный невязкий газ (27). Совершенный газ с постоянными теплоемкостями (27).	
Лекция 5. Совершенный двухатомный газ с релаксацией колебательной энергии.	32
Закон равнораспределения энергии (газ с постоянными теплоемкостями) (32). Квантовый гармонический осциллятор, формула для колебательной энергии в равновесии (33). Две подсистемы: поступательно-вращательная и колебательная (34). Колебательная температура (35).	
Лекция 6. Химически реагирующая смесь идеальных газов	40
Уравнение состояния (41). Кинетическая теория скоростей химических реакций (43). Идеально диссоциирующий газ (45).	
Лекция 7. Теория звука. Дисперсия и поглощение звука в релаксирующем газе	48
Звук в газе без релаксации (48). Звук в релаксирующем газе (50). Дисперсионное соотношение (53).	
Лекция 8. Одномерные нестационарные течения газа. Характеристики	57
Характеристики (58). Инварианты Римана (61). Простая волна (62).	

Лекция 9. Применение решений типа простой волны к анализу нестационарных течений совершенного газа .	65
Задача о поршне, выдвигающемся из трубы, заполненной газом (65). Центрированная волна разрежения (68). Течение в области, граничащей с областью постоянного течения (или покоя), — простая волна (69). Опрокидывание простой волны сжатия (69). Характеристики уравнений одномерных нестационарных течений релаксирующего газа (70). Предельный переход к равновесному течению (71).	
Лекция 10. Теория ударных волн	74
Соотношения на сильном разрыве (74). Стационарный прямой скачок уплотнения (77). Адиабата Гюгонио (77). Слабые ударные волны (79). Сильные ударные волны (82). Ударные волны в совершенном газе с постоянными теплоемкостями (83).	
Лекция 11. Ударные волны в газе с релаксацией.	87
Ударные волны с частичной дисперсией. Зона релаксации (87). Ударные волны с полной дисперсией (90).	
Лекция 12. Нестационарные течения с ударными волнами	94
Задача о поршне, вдвигающемся в газ (94). Распад произвольного разрыва (95). Задача о сильном взрыве (98).	
Лекция 13. Общие свойства стационарного адиабатического течения совершенного газа.	102
Общие уравнения движения однородного сжимаемого газа (102). Интеграл Бернулли (103). Свойства движения (104). Важные определения (104). Выражения для параметров потока через параметры торможения и числа M и λ (107).	
Лекция 14. Одномерная теория сопла Лаваля	109
Уравнение обращения воздействия (109). Формула сопла Лаваля (111). Течение релаксирующего газа (112). Течение через простое сопло (114). Течение через сопло Лаваля с уменьшением противодавления: расчетный и нерасчетный режимы (115).	
Лекция 15. Неравновесное течение в сопле Лаваля. Метод мгновенного замораживания	116
Общие свойства релаксирующего потока при расширении в сопле Лаваля (116). Уравнение релаксации. Замороженное и равновесное течения. Простые решения (117). Три характерных времени для течения в сопле (119). Метод мгновенного замораживания (122).	
Лекция 16. Двумерные стационарные течения сжимаемого газа	124
Двумерные стационарные течения: плоские и осесимметричные (124). Теорема Крокко о вихрях (126). Потенциал скорости; уравнение для потенциала скорости в сжимаемом газе (128). Переменные годографа. Уравнение Чаплыгина (130).	
Лекция 17. Трансзвуковые течения сжимаемого газа . .	131
Особенности решения задач в переменных годографа (131). Уравнение Эйлера–Трикоми — трансзвуковой аналог уравнения Чаплы-	

гина (133). Уравнение для потенциала плоского почти однородного трансзвукового потока газа (135).

Лекция 18. Сверхзвуковые течения	137
Уравнения характеристик и «условия на характеристиках» (137). Вывод уравнений для характеристик из уравнения для потенциала (139). Характеристики в плоскости годографа для потенциальных течений (140). Течение типа простой волны (141). Обтекание выпуклой стенки (142). Обтекание выпуклого угла. Центрированная волна разрежения (144).	
Лекция 19. Стационарное течение газа с релаксацией .	146
Характеристики (146). Обтекание выпуклого угла релаксирующим газом. Качественная картина (147). Решение в окрестности первой характеристики веера (148). Переход к равновесию в течениях с конечными возмущениями на примере центрированной волны разрежения (151).	
Лекция 20. Стационарные течения газа с ударными волнами	153
Поверхности разрыва (153). Косая ударная волна (154).	
Лекция 21. Некоторые простые течения с ударными волнами	158
Отражение ударных волн (158). Обтекание клина (159). Обтекание пластины под углом атаки (160). Обтекание конуса (160). Течение около вогнутой поверхности (162).	
Лекция 22. Аэродинамика тонкого профиля крыла . . .	164
Линеаризация уравнения для потенциала и интеграла Бернулли (164). Дозвуковое обтекание тонкого профиля, закон Прандтля-Глауэрта (165). Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля, закон Аккерета (166). Околовозвуковой закон подобия для тонких тел (168).	
Лекция 23. Сверхзвуковое обтекание затупленных тел.	170
Постановка задачи (170). Основные понятия и определения (172). Принцип независимости от числа Маха (173). Понятие о численных методах расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел (173).	
Лекция 24. Основные закономерности обтекания затупленных тел	177
Формула Рэлея (177). Формула Ньютона (178). Формула Буземана (179). Закон подобия для течения вблизи линии торможения (181).	
Лекция 25. Сверхзвуковое обтекание тонких удлиненных тел	184
Анализ порядков возмущений для тонкого тела в гиперзвуковом потоке (184). Закон подобия при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью (186). Закон плоских сечений при обтекании тонких тел (188).	
Список литературы	190

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник содержит систематическое изложение основ современной газовой динамики. Физическое моделирование исходит из рассмотрения достаточно общей модели — многокомпонентной смеси химически реагирующих идеальных газов. Модели, используемые в различных приложениях газовой динамики, получаются как частные случаи. Движение газа моделируется на основе уравнений баланса, а состояние — на основе принципа локального термодинамического равновесия для конечного числа подсистем, составляющих газовую среду. Рассматриваются одномерные стационарные и нестационарные течения, двумерные стационарные течения и задачи внешней аэродинамики, включая аэродинамические задачи космических спускаемых аппаратов. Практически во всех разделах анализируются проблемы релаксационной газовой динамики и демонстрируются физические эффекты, полученные в этом анализе.

Курс лекций существенно обновлен по сравнению с классическими курсами лекций по газовой динамике. В связи с развитием ракетно-космической техники и космическими экспериментами во второй половине прошлого века существенно расширен раздел по аэродинамике затупленных и плохо обтекаемых тел. Моделирование газовой среды строится исходя из общезначимых представлений о структуре газа. Поэтому классическая модель совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей представлена в курсе как частный случай общего подхода. В курсе широко представлены достижения релаксационной газовой динамики, совершенно необходимые при расчете и проектировании современных аэродинамических аппаратов и устройств. Эти результаты широко используются также в смежных разделах науки: в теории газодинамических лазеров, метеоритике, некоторых разделах астрофизики.

Данный курс лекций читается автором в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова с 1977 г. В новых разделах курса использованы собственные результаты автора. Это относится к сверхзвуковой аэродинамике затупленных тел и задачам релаксационной газовой динамики: одномерной теории сопла, распространению возмущений в стационарных сверхзвуковых потоках.

Лекция 1

ВВЕДЕНИЕ

Свойство сжимаемости сплошной среды. Роль скорости звука. Нелинейные волны. Приложения газовой динамики: теплообмен на спускаемом аппарате, орбитальный самолет многоразового действия; теория газовых машин, сопло реактивного двигателя; газодинамические лазеры; космическая газодинамика, звезды и межзвездная среда, физика метеоров.

Физические особенности среды

Газовая динамика изучает движение сплошной среды с учетом сжимаемости. В гидродинамике этим свойством сплошной среды пренебрегают. Учет сжимаемости приводит к целому ряду качественно новых явлений, первое место среди которых занимают ударные волны.

Сжимаемость

Рассмотрим *стационарное* движение сплошной среды. Уравнение импульсов в проекции на касательную к линии тока можно записать в следующем виде:

$$v \frac{dv}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь v — модуль скорости газа, ρ — плотность, p — давление, s — координата вдоль линии тока.

При некоторых частных законах связи между термодинамическими переменными, описывающими газ, можно найти первый интеграл уравнения (1.1), который имеет вид зависимости между переменными v , p , ρ , выполняющейся в любой точке стационарного потока. Рассмотрим два частных случая:

- 1) несжимаемая жидкость, $\rho = \text{const}$;
- 2) сжимаемый газ, адиабатическое течение, $p = C(L)\rho^\gamma$ (последняя зависимость ниже будет выведена из общих законов газовой динамики и термодинамики).

Найдем первые интегралы уравнения (1.1) в этих случаях и сравним их между собой.

1) Для несжимаемой жидкости

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0(L). \quad (1.2)$$

Здесь p_0 — давление в той точке линии тока, где $v = 0$.

2) Для сжимаемого газа

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\frac{C}{p} \right)^{1/\gamma} \frac{dp}{ds} = 0, \quad \frac{d}{ds} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{C}{p} \right)^{1/\gamma} p \right] = \\ = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Индексом нуль отмечены параметры в точке торможения.

Так как $p_0/\rho_0^\gamma = p/\rho^\gamma$, то из последнего уравнения (1.3) получим

$$\frac{\gamma-1}{2} \frac{v^2}{\gamma p/\rho} + 1 = \frac{p_0}{p} \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Отсюда

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{v^2}{\gamma p/\rho} \right)^{\gamma/\gamma-1}. \quad (1.4)$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей газа. Представим последнюю формулу в виде, близком к случаю 1). Для этого правую часть разложим в ряд Тейлора при малых значениях $v^2/(\gamma p/\rho)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} = 1 + \frac{\rho v^2}{2p} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1 \right) \frac{1}{2} \frac{(\gamma-1)^2}{4} \frac{v^4}{(\gamma p/\rho)^2} + \dots = \\ = 1 + \frac{v^2}{2p/\rho} \left(1 + \frac{v^2}{4\gamma p/\rho} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Формулу для несжимаемой жидкости можно записать так:

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{v^2}{2p/\rho}. \quad (1.6)$$

Видно, что при $\frac{v^2}{\gamma p/\rho} \ll 1$ формулы (1.5) и (1.6) совпадают.

Пример. Воздух, $\gamma = 1.405$, $T = 273$ К. Величины p_0/p для двух случаев будут различаться менее чем на 1 % при $v < 66.4$ м/с. При больших скоростях (для данного примера) свойство сжимаемости среды существенно влияет на параметры течения.

Роль скорости звука

В дальнейшем мы узнаем, что величина $\gamma p / \rho$ в совершенном газе равна квадрату скорости звука:

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (1.7)$$

где a — скорость распространения малых возмущений (звука) в покое газе с параметрами состояния p и ρ . В потоке газа величина a — скорость распространения возмущений относительно движущегося газа. Из формулы (1.5) (или из (1.4)) видно, что влияние сжимаемости существенно, когда скорость газа становится одного порядка со скоростью звука, вычисленной по локальным параметрам состояния. Их отношение $v/a = M$ называют *числом Маха*.

В газовой динамике различают три типа течений:

- 1) дозвуковые ($v < a$ всюду в потоке; $M < 1$);
- 2) трансзвуковые ($v \approx a$ всюду в потоке; $M \approx 1$);
- 3) сверхзвуковые ($v > a$ всюду в потоке; $M > 1$).

Как мы увидим ниже, все три типа течений описываются одними и теми же системами уравнений, однако математические свойства этих уравнений существенным образом зависят от типа течения. Соответственно этому и методы исследования существенно различаются.

Нелинейные волны

Как уже отмечалось, в сжимаемом газе малые возмущения произвольного профиля распространяются со скоростью звука. То обстоятельство, что скорость газа во всей области течения (или в ее части) превышает скорость звука (т.е. скорость малого возмущения), приводит к появлению качественно нового явления — ударных волн, на которых состояние и движение газа могут резко изменяться на величины, сравнимые с самими значениями параметров.

Изучение свойств ударных волн, их влияния на параметры течения газа представляет собой одну из главных тем газовой динамики.

На простом примере рассмотрим распространение малых возмущений в течении газа и с его помощью постараемся понять закономерность образования ударных волн.

Пусть имеем однородный поток со скоростью v . В каком-то месте потока происходит малое возмущение, распространяющееся по газу со скоростью a (во все стороны). Рассмотрим характер распространения возмущения в неподвижной системе координат с центром в точке O . Очевидно, скорость возмущения запишется вектором $v + an$, где n — произвольный единичный вектор. Абсолютная скорость возмущения $v + an$ зависит от направления n и от соотношения между v и a . Если $v < a$, то, как видно из левой части рис. 1.1, малое возмущение будет рас-

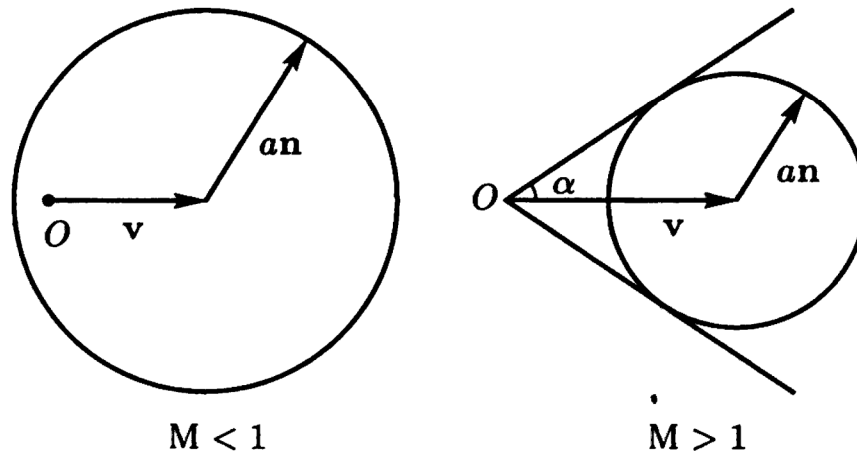


Рис. 1.1. Распространение слабых возмущений в однородном потоке газа

пространяться во все стороны от исходной точки O ; например, вправо со скоростью $v + a$ (> 0), а влево скоростью $v - a$ (< 0). Иное дело при $v > a$. Тогда влево (от точки O) возмущение распространиться не может. Геометрическое место возмущения в каждый момент времени t представляет собой сферу радиуса at с центром на расстоянии vt правее точки O . Легко видеть, что огибающей таких сфер является конус с углом полураствора $\sin \alpha = a/v$, $\alpha = \arcsin(1/M)$. Этот конус называется *конусом Маха*.

Аналогичная, но более сложная картина течения возникает при большом (не малом) возмущении потока. Пусть, например, поток обтекает тело конечных размеров, например сферу. Если поток дозвуковой, то нарушение однородности течения (возмущение от сферы) распространится во все стороны. Если

же поток сверхзвуковой, то вперед возмущения не проникают, а скапливаются у передней части сферы и сносятся в некоторую область вниз по потоку. В случае произвольного возмущения нельзя в простом виде представить процесс скапливания и сноса возмущений в силу его нелинейности. Этот процесс описывается точными уравнениями газовой динамики. Однако можно предположить, что скапливание возмущений приводит к появлению пакета волн, на котором параметры газа резко изменяются: до пакета имеется однородный поток, ничего «не знающий» о наличии препятствия, а после пакета поток уже подстроился для поворота около препятствия. Данный пакет и представляет собой ударную волну. Детали такой картины обтекания мы выясним позже путем решения точной системы уравнений газовой динамики.

Применения в аэродинамике

В связи с подготовкой и осуществлением космических полетов возникла необходимость возвращения аппаратов с орбиты на поверхность Земли. Это привело к развитию аэродинамики очень больших скоростей, включая орбитальные скорости. Здесь основной задачей является достижение минимального аэродинамического нагрева в некотором заданном диапазоне траекторий возвращения, а также уменьшение перегрузок в пилотируемых спускаемых аппаратах. Попробуем определить из простых соображений, какие классы тел отвечают минимальному нагреву.

Пусть тело массы m входит в атмосферу планеты со скоростью V_e . Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F_x = -c_x \frac{1}{2} \rho V^2 S, \quad (1.8)$$

S — площадь миделева сечения.

Здесь сила тяжести не учитывается, так как начальная скорость очень велика. Уравнение притока тепла имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = c_h \frac{1}{2} \rho V^3 S. \quad (1.9)$$

Из теории пограничного слоя известно, что коэффициент теплообмена c_h пропорционален коэффициенту трения c_{xf} , который определяется через силу трения: $F_{xf} = c_{xf} \cdot (1/2) \rho V^2 S$. Имеем $c_x = c_{xp} + c_{xf}$, где c_{xp} — коэффициент волнового сопротивления. Положим для определенности $c_h = (1/2) c_{xf}$. Исключая c_h

из уравнения (1.9), получим

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{c_{xf}}{c_x} \frac{d(mV^2/2)}{dt}. \quad (1.10)$$

Считая отношение c_{xf}/c_x постоянным вдоль траектории и интегрируя (1.10) от момента входа ($Q_0 = 0$, $V = V_e$) до момента приземления ($V_t = 0$), получим

$$Q = \frac{1}{2} \frac{c_{xf}}{c_x} \cdot \frac{1}{2} m V_e^2. \quad (1.11)$$

Итак, в тепло переходит доля начальной кинетической энергии, равная половине отношения коэффициента трения к полному коэффициенту сопротивления. Для снижения аэродинамического нагрева необходимо уменьшить роль трения в полном сопротивлении. Этому требованию отвечают короткие плохо обтекаемые тела типа сферы.

Приведем некоторые числовые данные:

- 1) сфера, $c_{xf}/c_x = 0.01$;
- 2) самолет, $c_{xf}/c_x = 0.33$;
- 3) плоская пластина вдоль потока, $c_{xf}/c_x = 1$.

Блестящим применением методов и результатов современной газовой динамики служит разработка и реализация орбитального самолета многоразового действия. Этот аппарат является своеобразным синтезом чисто самолетных разработок и только что обсуждавшихся особенностей спускаемого аппарата. Существенна роль правильного учета чисто химических процессов. Исследование теплообмена в химически реагирующем газе показало, что величина теплового потока к стенке в диссоциированном воздухе сильно зависит от состояния поверхности, точнее, от ее каталитических свойств. Зависимость эта такова, что химически нейтральная стенка получает минимально возможный приток тепла, поскольку на ней не реализуется химическая (тепловая) энергия, затраченная на разрыв химической связи атомов в молекуле. Напротив, на полностью каталитической стенке происходит дополнительное выделение энергии в процессе рекомбинации атомов в молекулы.

Использование некаталитических (точнее, минимально каталитических) поверхностей в виде специально изготовленных плиток позволило существенно снизить вес теплозащиты орбитального самолета, что соответственно увеличивает вес полезного груза при фиксированной мощности. Характерной особенностью движения самолета на участке спуска служит использование больших углов атаки. В этом режиме движения самолет напоминает спускаемый аппарат простой формы.

Применения в теории газовых машин (двигатели, аэродинамические трубы)

Выше рассматривалась область приложений газовой динамики, объединенная общим названием «внешняя аэродинамика». Другой важной областью приложения методов и результатов газовой динамики является так называемая «внутренняя аэродинамика» или «течения в каналах, струях».

Важнейшее место в этой области занимает теория реактивных двигателей. Основной проблемой здесь является достижение максимальной тяги при прочих равных условиях. Простейшая, элементарная теория двигателей базируется на хорошо разработанной области газовой динамики, известной под названием «теория одномерных стационарных течений». В нашем курсе лекций этой теории будет уделено значительное внимание. По мере развития техники реактивных двигателей элементарная теория оказалась уже недостаточной, и стала развиваться двумерная и даже трехмерная теория, учитывающая пограничные слои на стенках каналов, высокотемпературные неравновесные явления в газе, взаимодействие внутренних скачков с пограничным слоем, турбулентность и другие сложные явления.

Другим важнейшим применением достижений газодинамики каналов и струй является техника аэродинамического эксперимента. В настоящее время эта техника очень высоко развита. Конструирование сверхзвуковых и гиперзвуковых аэродинамических труб невозможно без знания законов газовой динамики. В частности, вопрос о допустимых максимальных размерах моделей, позволяющих имитировать условия свободного полета в условиях ограниченного объема рабочей части трубы, нельзя решить без знания законов распространения возмущений в сжимаемом газе. Теория аэродинамических труб стационарного действия также основана на теории одномерных стационарных течений сжимаемого газа.

В последнее время разработаны многочисленные системы аэродинамических установок кратковременного, импульсного действия, наиболее распространенными среди которых являются ударные трубы. Теория ударных труб и других импульсных установок основана на теории одномерных нестационарных движений сжимаемого газа, которая также входит в данный курс лекций. Ударные трубы стали в последнее время мощным инструментом не только аэродинамического, но и физического эксперимента, позволяющим изучать свойства на атомно-молекулярном уровне.

Прочие приложения

Результаты и методы газовой динамики находят в последнее время многие, подчас неожиданные применения в различных областях науки и техники. Назовем лишь некоторые из них.

Разнообразное применение (в частности, в народном хозяйстве) имеет *теория взрыва*: от сооружения искусственных плотин до сварки различных металлов.

Важной отраслью техники сегодняшнего дня являются лазеры. А одной из областей лазерной техники является применение *газодинамических лазеров*.

Принцип действия лазеров состоит в образовании так называемой инверсной среды, в которой верхние уровни колебательного возбуждения молекул (или иных степеней свободы) заселены существенно больше, чем в условиях термодинамического равновесия. Мощные световые потоки получены в реально построенных газодинамических лазерах только на основе знания законов газовой динамики.

Внушительные достижения внешней аэродинамики дали в последнее время новый импульс развитию одной из древнейших естественных наук — *метеоритики*. Приложения законов газовой динамики к наблюдаемым в природе метеорным явлениям позволяют глубоко проникнуть в физическую природу межпланетного пространства.

В последнее время широко развивается применение законов газовой динамики к *астрофизическим явлениям*. Теория эволюции звезд, звездных скоплений, черных дыр и других чрезвычайных явлений в космическом пространстве не может обойтись без законов газовой динамики. Изучается интересное явление — образование ударных волн при столкновении солнечного ветра с межзвездной средой. Оба эти материальных объекта чрезвычайно разрежены. Однако космические аппараты уже позволяют обнаружить в космосе явления, идентифицируемые как ударные волны.

Лекция 2

МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩАЯ ГАЗОВАЯ СМЕСЬ. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА

Уравнение сохранения i -й компоненты, интегральная и дифференциальная формы. Уравнение неразрывности смеси, диффузионные потоки, массовая концентрация. Уравнение сохранения импульса, интегральная форма для подвижного объема. Тензор напряжений, давление, поток импульса. Уравнение энергии, интегральная форма для неподвижного объема. Уравнение притока тепла. Уравнение сохранения для частных видов энергии. Понятие энтропии, уравнение производства энтропии в интегральной и дифференциальной формах.

Уравнение сохранения i -й компоненты

Рассматривается многокомпонентная химически реагирующая газовая смесь. Каждая компонента обладает внутренними степенями свободы.

Выделим в потоке жидкости объем, покоящийся относительно неподвижной системы координат (точка зрения Эйлера). Изменение массы i -й компоненты в объеме происходит за счет втекания этой компоненты через стенки объема и за счет химических реакций. Полная масса i -й компоненты в объеме V равна $\int_V \rho_i dV$. Запишем баланс этой массы:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_i dV = \int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_{\Sigma} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_V \omega_i dV. \quad (2.1)$$

Первое равенство получено на том основании, что объем V неподвижен. Знак минус в первом слагаемом правой части показывает, что при интегрировании по поверхности Σ используется внешняя нормаль. Здесь $\mathbf{v}_i$ — среднемассовая скорость i -й компоненты, так что $\rho_i \mathbf{v}_i$ — масса i -й компоненты, переносимая за единицу времени через единичную площадку; ω_i — масса i -й компоненты, образующаяся за единицу времени в единице

объема во всех химических реакциях. Используя формулу Гаусса–Остроградского $\int_{\Sigma} \mathbf{a} \cdot d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV$, получим

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} (\rho_i \mathbf{v}_i) dV + \int_V \omega_i dV. \quad (2.2)$$

Поскольку объем V произвольный, то его можно считать малым и в непрерывном поле по теореме о среднем получить

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_i \mathbf{v}_i) = \omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Просуммируем (2.3) по всем i . Вводя определение среднemasсовой скорости смеси $\rho \mathbf{v} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i$, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \left(\text{или} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right), \quad (2.4)$$

так как $\sum_{i=1}^N \omega_i = 0$, поскольку во всех химических реакциях полная масса вещества не изменяется.

Определим диффузионный поток

$$\mathbf{J}_i = \rho_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}) \quad (2.5)$$

как разность массовых потоков i -й компоненты и смеси в целом.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_i + \operatorname{div} (\rho_i \mathbf{v}) = \omega_i, \quad (2.6)$$

или

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \operatorname{div} \mathbf{v} = - \operatorname{div} \mathbf{J}_i + \omega_i. \quad (2.7)$$

Введем массовую концентрацию $\alpha_i = \rho_i / \rho$ (масса i -й компоненты в единице массы смеси). Иногда пользуются числом молей i -й компоненты n_i в единице массы смеси $\gamma_i = n_i / \rho = \alpha_i / m_i$, где m_i — молекулярный (атомарный) вес. Подставляя α_i вместо ρ_i в (2.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha_i \rho)}{dt} + \rho \alpha_i \operatorname{div} \mathbf{v} &= - \operatorname{div} \mathbf{J}_i + \omega_i, \\ \rho \frac{d\alpha_i}{dt} + \alpha_i \frac{d\rho}{dt} + \alpha_i \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= - \operatorname{div} \mathbf{J}_i + \omega_i. \end{aligned}$$

Сумма второго и третьего слагаемых в левой части согласно (2.4) равна нулю. Окончательно

$$\rho \frac{d\alpha_i}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_i + \omega_i, \quad \text{где} \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \alpha_i. \quad (2.8)$$

Из определения имеем $\sum_i \alpha_i = 1$, $\sum_i \mathbf{J}_i = 0$. Поэтому среди (2.8) независимыми являются лишь $N - 1$ уравнение.

Для завершения вывода необходимо еще определить выражения для $\mathbf{J}_i$ и ω_i . Это будет сделано в одной из следующих лекций.

Уравнение сохранения импульса

Уравнение импульса выведем для смеси в целом. Выделим в потоке жидкий объем (точка зрения Лагранжа). Он движется под действием массовых и поверхностных сил:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{F} \rho dV - \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma \quad (2.9)$$

(изменение количества движения жидкого объема равно сумме действующих сил). Уравнение (2.9) выражает второй закон Ньютона для жидкого объема.

Поверхностные силы $\mathbf{p}_n$ зависят от ориентации площадки, задаваемой нормалью $\mathbf{n}$. Силу $\mathbf{p}_n$ можно выразить через поверхностные силы на площадках, ориентированных перпендикулярно осям декартовой системы координат:

$$\mathbf{p}_n = p_x \cos(nx) + p_y \cos(ny) + p_z \cos(nz). \quad (2.10)$$

Для вычисления скорости изменения количества движения жидкого объема (левая часть (2.9)) перейдем от интегрирования по объему V к интегрированию по массе m . Так как полная масса M подвижного объема V фиксирована, получим

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \frac{d}{dt} \int_M \mathbf{v} dm = \int_M \frac{d\mathbf{v}}{dt} dm = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV. \quad (2.11)$$

Используем формулу Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) dV. \quad (2.12)$$

С учетом (2.11), (2.12) уравнение (2.9) запишется так:

$$\int_V \rho \frac{dv}{dt} dV = \int_V \mathbf{F} \rho dV - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV.$$

Поскольку объем V произвольный, то для непрерывного движения на основании теоремы о среднем получим

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (2.13)$$

Здесь $\mathbf{P}$ — тензор напряжений, $\mathbf{P} = p\mathbf{U} - \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор вязких напряжений, p — гидростатическое (термодинамическое) давление (т. е. давление в состоянии покоя при тех же значениях прочих параметров).

Тождественными преобразованиями уравнение (2.13) можно привести к дивергентной форме

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{P}) + \rho \mathbf{F}, \quad (2.14)$$

где $\mathbf{v} \mathbf{v}$ — диада, т. е. тензор с компонентами $v_i v_j$. Здесь $\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{P}$ — тензор плотности потока импульса, $\rho \mathbf{F}$ — «источник» импульса.

Уравнение (2.14) можно трактовать как баланс импульса $\rho \mathbf{v}$ в неподвижном объеме: изменение по времени $\rho \mathbf{v}$ в неподвижном объеме происходит за счет конвективного переноса импульса и под действием поверхностных сил, а также за счет объемных сил, распределенных по неподвижному объему.

Уравнение энергии

Выделим снова неподвижный объем V и рассмотрим для него баланс энергии. Поскольку энергия системы не может рождаться самопроизвольно, уравнение баланса полной энергии единицы массы E имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E dV = \int_V \frac{\partial \rho E}{\partial t} dV = \int_{\Sigma} \mathbf{J}_E d\sigma. \quad (2.15)$$

Обычное преобразование с использованием формулы Гаусса–Остроградского позволяет свести (2.15) к дивергентной форме

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_E. \quad (2.16)$$

Энергия единицы массы газа складывается из кинетической энергии и внутренней энергии:

$$E = \frac{v^2}{2} + e. \quad (2.17)$$

Поток энергии складывается из конвективного переноса энергии $\rho \mathbf{v} E$, работы поверхностных сил $\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}$ (скалярное произведение тензора $\mathbf{P}$ на вектор $\mathbf{v}$) и потока тепла $\mathbf{q}$. Здесь $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{v})_\alpha = \sum_{\beta} P_{\alpha\beta} v_\beta$ — α -компонента вектора $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{v})$. Внешние силовые поля не учитываются.

Таким образом, уравнение (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial \rho (e + v^2/2)}{\partial t} = -\operatorname{div} (\rho \mathbf{v} E + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}). \quad (2.18)$$

Справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} E) &= \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla E + E \frac{\partial \rho}{\partial t} + E \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \\ &= \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla E \right) = \rho \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

для любой скалярной величины E .

С использованием полной производной уравнение (2.18) можно записать так:

$$\rho \frac{dE}{dt} = -\operatorname{div}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (2.19)$$

Умножая (2.13) скалярно на $\mathbf{v}$, получим уравнение живых сил

$$\rho \frac{dv^2/2}{dt} = -\operatorname{div}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{P} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.20)$$

Здесь $F \equiv 0$.

Вычитая (2.20) из (2.19), получим уравнение притока тепла

$$\rho \left(\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.21)$$

Здесь $h = e + p/\rho$ — энтальпия смеси. Использовано равенство $p \mathbf{U} : \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r} = p \operatorname{div} \mathbf{v}$.

Аналогично можно получить уравнения сохранения для частных видов энергии. Из физики известно, что внутренняя энергия газа может состоять из энергии поступательного движения молекул, энергии вращательного движения, энергии колебательного движения, энергии электронных уровней и т. д.

В уравнениях сохранения частного вида энергии необходимо учесть источники членов, выражающие скорость перехода одного вида энергии в другой. Например, при столкновениях молекул может происходить частичное неупругое преобразование энергии относительного поступательного движения в энергию молекулярных колебаний. Скорость преобразования энергии из одного вида в другой (т.е. количество энергии, преобразованной в среднем за единицу времени) зависит от физических (молекулярных) свойств рассматриваемого газа.

Например, рассмотрим баланс колебательной энергии e_{vi} единицы массы i -й компоненты. Введем снова фиксированный объем V . Имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_i e_{vi} dV = \int_V \frac{\partial(\rho_i e_{vi})}{\partial t} dV = - \int_{\Sigma} \mathbf{J}_{vi} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_V \omega_{vi} dV. \quad (2.22)$$

Здесь $\mathbf{J}_{vi} = \rho_i \mathbf{v}_i e_{vi} + \mathbf{q}_{vi}$, ω_{vi} — скорость образования колебательной энергии внутри объема, $\mathbf{q}_{vi}$ — неконвективный (немеханический) поток колебательной энергии. Прodelывая обычные преобразования, получим

$$\rho_i \frac{de_{vi}}{dt} + \mathbf{J}_i \cdot \text{grad } e_{vi} + \text{div } \mathbf{q}_{vi} = \omega_{vi} - e_{vi} \omega_i. \quad (2.23)$$

Здесь $\mathbf{J}_i$, ω_i — собственно диффузионный поток и скорость образования i -й компоненты. В однокомпонентном газе $\mathbf{J}_i = 0$, $\omega_i = 0$ и колебательная энергия изменяется за счет переноса $\mathbf{q}_v$ и перехода ω_v из других видов энергии.

Понятие энтропии, уравнение производства энтропии

Для систем, состоящих из огромного числа элементов, термодинамика позволяет ввести еще одну функцию состояния — *энтропию*. При обратимых процессах в изолированных системах энтропия сохраняется, при необратимых — возрастает. Обратимый процесс — это процесс, в течение которого система проходит цепь равновесных состояний.

Для незамкнутой термодинамической системы прирост энтропии состоит из вклада, поступающего из окружающей среды, и вклада, возникающего в самой системе.

Введем энтропию единицы массы смеси s . В качестве термодинамической системы рассмотрим частицу газа, не столь большую, чтобы ее можно было считать однородной и достаточно большую, чтобы она содержала много молекул газа. Тогда с энтропией можно обращаться так же, как с плотностью или внутренней энергией.

Выбирая неподвижный объем V , подсчитаем изменение со временем энтропии этого объема, учитывая перенос энтропии с газом через границу объема и «рождение» ее внутри объема

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_V \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} dV = - \int_{\Sigma} \mathbf{J}_s \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int \omega_s dV. \quad (2.24)$$

Переходя к малому объему, для непрерывных движений получим

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_s + \omega_s, \quad \omega_s \geq 0. \quad (2.25)$$

Поток $\mathbf{J}_s$ состоит из конвективного переноса $(\rho \mathbf{v} s)$ и других видов переноса энтропии: $\mathbf{J}_s = \rho \mathbf{v} s + \mathbf{q}_s$.

Разумеется, использование только фундаментальных законов физики не позволило нам получить замкнутую систему уравнений движения сплошной среды. Для этой цели необходимо привлечение дополнительных гипотез.

Уравнение (2.25) можно записать также через полную производную:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q}_s + \omega_s. \quad (2.26)$$

Лекция 3

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Гипотеза о локальном термодинамическом равновесии. Общая связь между энтропией, внутренней энергией, плотностью и концентрациями. Соотношение Гиббса, эквивалентное определению новых термодинамических переменных для движущейся частицы. Обоснование принятой гипотезы: опытные данные, простейшие микроскопические модели. Уравнение производства энтропии. Поток и источник энтропии. Термодинамические силы и термодинамические потоки, линейная связь между ними.

Гипотеза об уравнении состояния

До сих пор использовались лишь законы сохранения, справедливые для сплошной среды как материального континуума. Законы сохранения не дают достаточной информации для получения замкнутой системы уравнений. Для этой цели необходимо привлечь дополнительные данные, индивидуализирующие материальную среду.

В качестве основного замыкающего условия принимается, что движущаяся жидкая частица (элемент континуума) ведет себя как термодинамическая система, т. е. для нее справедливы выводы термодинамики, полученные для равновесных систем. Это предположение иногда называют *гипотезой о локальном термодинамическом равновесии* (ЛТР). Движущаяся жидкая частица считается системой, допускающей последовательное термодинамическое описание, т. е. использование фундаментальных законов термодинамики (применительно ко всей системе или ее макроскопическим подсистемам) и правил аддитивности (а также, например, закона Дальтона). При таком обобщении рассмотрение жидкой частицы как термодинамической полностью равновесной системы является частным случаем.

Итак, предполагается, что между параметрами, описывающими макроскопическое состояние жидкой частицы и ее подсистем, существует связь, справедливая для состояния полного термодинамического равновесия каждой подсистемы. Это означает, что все взаимодействия между подсистемами и с внешней средой протекают гораздо медленнее, чем процесс установления

полного равновесия в каждой подсистеме. В случае многокомпонентной смеси газов с неравновесными химическими реакциями эта связь может быть представлена в виде

$$s = s(e, \rho, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \quad (3.1)$$

и называется *уравнением состояния среды*. Из предположения о совокупности термодинамически равновесных подсистем следует также, что не только переменные, входящие в (3.1), связаны соотношением для термодинамического равновесия, этому же правилу подчиняются и другие термодинамические переменные, определенные по (3.1) из термодинамического тождества Гиббса. Считаем, что при движении среды для элемента континуума вдоль траектории центра масс справедливо соотношение

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} - \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \frac{d\alpha_i}{dt}. \quad (3.2)$$

Здесь μ_i — химический потенциал i -й компоненты.

Таким образом, мы привлекаем закономерности равновесной термодинамики к описанию заведомо неравновесных процессов. Это оправдано тем, что в рассматриваемых условиях континуума влияние неравновесности процессов невелико, так что оно может быть учтено посредством применения в формуле (3.2) выписанных ранее законов сохранения.

Данная гипотеза может быть оправдана двумя способами:

а) справедливостью выводов, получаемых с ее использованием;

б) последовательным рассмотрением закономерностей неравновесной термодинамики на простейших микроскопических моделях.

Соотношение (3.2) фактически выражает следующую мысль. Энтропия жидкой частицы хотя и изменяется вследствие необратимых процессов (вязкости, диффузии и прочего), но это изменение происходит не произвольным (собственным) путем, а через изменение характеристик среды e , ρ , α_i , которые подчиняются законам сохранения.

Вывод уравнения сохранения энтропии

Определим структуру членов q_s , ω_s уравнения (2.26).

Принятая гипотеза позволяет выразить скорость производства энтропии через процессы и виды взаимодействия, учтенные при составлении уравнений сохранения.

Итак, подставим уравнение притока тепла и уравнение сохранения i -й компоненты в правую часть уравнения (3.2). Вначале эти уравнения представим так:

$$\rho \left(\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \right) = \rho \left(\frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3.3)$$

$$\rho \frac{d\alpha_i}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_i + \omega_i. \quad (3.4)$$

Подставим (3.3), (3.4) в (3.2), переходя одновременно в (3.4) от скорости образования компоненты ω_i к скорости химической реакции ω_j :

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} &= -\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{T} (\operatorname{div} \mathbf{J}_i - \omega_i) = \\ &= -\frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{T} \operatorname{div} \mathbf{J}_i - \sum_{j=1}^r \frac{A_j}{T} \omega_j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь A_j — химическое сродство реакции с номером j :

$$A_j = \sum_{i=1}^N \nu_{ij} \mu_i, \quad (3.6)$$

так как $\omega_i = \sum_{j=1}^r \nu_{ij} \omega_j$, где ν_{ij} — стехиометрические коэффициенты j -й химической реакции.

Соотношение (3.5) можно представить в виде, подобном уравнению (2.26), т. е. выделить дивергенцию и источник. Запишем равенства

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T^2}, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} \frac{\mu_i \mathbf{J}_i}{T} = \frac{\mu_i}{T} \operatorname{div} \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_i \cdot \operatorname{grad} \frac{\mu_i}{T}.$$

Подставляя (3.7) в (3.5), получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} &= -\operatorname{div} \left[\frac{1}{T} \left(\mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{J}_i \right) \right] - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T^2} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i \cdot \operatorname{grad} \frac{\mu_i}{T} - \sum_{j=1}^r \frac{A_j}{T} \omega_j. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теперь первое слагаемое правой части (3.8) обозначим через $-\operatorname{div} \mathbf{q}_s$, а следующие четыре слагаемых через ω_s и сопоставим с уравнением (2.26). Итак,

$$\mathbf{q}_s = \frac{1}{T} \left(\mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \mu_i \mathbf{J}_i \right), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \omega_s &= -\mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T^2} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i \cdot \operatorname{grad} \frac{\mu_i}{T} - \sum_{j=1}^r \omega_j \frac{A_j}{T} = \\ &= -\frac{1}{T} \mathbf{q}_s \cdot \operatorname{grad} T - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \mathbf{J}_i \cdot \operatorname{grad} \mu_i + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{T} \sum_{j=1}^r \omega_j A_j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

«Силы» и «потоки», их линейная связь

Формула (3.10) для скорости производства энтропии ω_s имеет вид суммы произведений некоторых выражений двух типов. К первому типу относятся потоки тепла $\mathbf{q}$ и диффузии $\mathbf{J}_i$, тензор вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и скорости химических реакций ω_j . Назовем их *термодинамическими «потоками»* (в обобщенном смысле). Члены второго типа $\operatorname{grad} T$, $\operatorname{grad} \mu_i$, $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r}$, A_j назовем *термодинамическими «силами»*. Последние имеют вид изменений термодинамических и динамических переменных. Естественно предположить, что эти изменения и порождают термодинамическую неравновесность, заключающуюся в появлении термодинамических «потоков» и, как следствие, в производстве энтропии жидкой (газообразной) частицы.

Опыт показывает, что в диапазоне применимости модели материального континуума термодинамические потоки являются линейными функциями термодинамических сил. Это второе основное предположение связывает потоки, входящие в полученные ранее уравнения сохранения, с градиентами термодинамических переменных, которые были введены гипотезой об уравнении состояния. Тем самым полная постановка задачи о движении сплошной среды оказывается замкнутой.

Выражение для производства энтропии ω_s в новых терминах можно записать так:

$$\omega_v = \sum_i J_i X_i, \quad (3.11)$$

а линейные соотношения примут вид

$$J_i = \sum_k L_{ik} X_k, \quad (3.12)$$

где J_i , X_k — декартовы компоненты потоков и сил соответственно, L_{ik} — коэффициенты переноса.

Разумеется, область справедливости линейного представления (3.12) не является одинаковой для всех неравновесных процессов. Так, перенос тепла за счет теплопроводности практически всегда пропорционален градиенту температуры, в то время как скорость химической реакции пропорциональна величине химического сродства лишь в узкой части около равновесной области. В остальной области применимости модели континуума скорость химической реакции является экспонентой от величины химического сродства.

Если подставить (3.12) в (3.11), для производства энтропии получим квадратичную форму

$$\omega_s = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k \quad (3.13)$$

по компонентам термодинамических сил. Так как $\omega_s \geq 0$, эта форма должна быть положительно определенной. Достаточным условием этого является требование, чтобы все главные миноры симметричной матрицы с элементами $L_{ik} + L_{ki}$ были положительны (или неотрицательны). Это означает, что диагональные элементы положительны, а недиагональные удовлетворяют условию $L_{ii}L_{kk} \geq 0.25(L_{ik} + L_{ki})^2$. Данное требование накладывает некоторые ограничения на коэффициенты переноса L_{ik} .

Лекция 4

СОВЕРШЕННЫЙ ГАЗ С ПОСТОЯННЫМИ ТЕПЛОЕМКОСТЯМИ

Однородный невязкий нетеплопроводный газ. Совершенный газ с постоянными теплоемкостями. Уравнение Клапейрона. Внутренняя энергия. Теплоемкости, формула Майера. Уравнение состояния, связывающее энтропию, внутреннюю энергию и плотность.

Однородный невязкий газ

Для получения замкнутой системы уравнений нужно определить все входящие в нее выражения. Общие правила выбора этих выражений сформулированы в предыдущей лекции. Ниже будут рассмотрены некоторые простейшие модели газовой среды. На их примере будут показаны конкретные приемы применения общих правил.

В данном курсе лекций основное внимание уделяется влиянию внутренней молекулярной структуры газа на его движение.

Наиболее распространенной моделью среды в газовой динамике является однородный невязкий нетеплопроводный газ. Из-за больших скоростей движения газа вязкость и теплопроводность в основном потоке оказываются несущественными и их часто можно отбросить. Таким образом, тензор вязких напряжений σ и вектор немеханического переноса тепла q будем считать тождественно равными нулю. Диффузия в однородном газе также отсутствует.

Совершенный газ с постоянными теплоемкостями

Простейшей моделью газовой среды является *идеальный газ*. В физике идеальным газом называют газ, взаимодействие между молекулами которого настолько слабо, что им можно пренебречь, т. е. это есть газ свободно движущихся молекул. Реальный газ можно рассматривать как идеальный, если средняя потенциальная энергия взаимодействия молекул много меньше средней кинетической энергии молекул. Точные методы статистической

физики дают следующую формулу для состояния идеального газа

$$p = \rho RT, \quad (4.1)$$

причем внутренняя энергия единицы массы зависит только от температуры и не зависит от плотности (удельного объема). Последний вывод является очевидным, так как уменьшение объема, занимаемого свободно движущимися молекулами, естественно, не должно сказаться на внутренней энергии газа, которая представляет собой сумму энергий молекул.

Исторически уравнение (4.1) было получено на основе опытных данных, точнее, известных опытных законов Бойля–Мариотта ($pV = \text{const}$ при $T = \text{const}$) и Гей-Люссака ($V_t = V_0(1 + \alpha_v T)$ при $p = \text{const}$) французским ученым (инженером) Клапейроном в 1834 г. Этот результат был получен без использования данных о молекулярной структуре газа.

Отметим здесь, что термин «идеальный газ» или «идеальная жидкость» часто применяется в механике сплошной среды для обозначения невязкой среды. Нужно сказать, что здесь нет никакой связи с использованным выше понятием идеального газа (один и тот же термин используют для обозначения двух разных понятий).

Вернемся к уравнению состояния (4.1). В (4.1) p — давление, ρ — плотность, T — температура, R — газовая постоянная, $R = R_0/m$, где R_0 — абсолютная газовая постоянная, m — молекулярный вес газа. Если давление измерять в атмосферах, ρ — в г/см³, T — в К, m — в г/моль, то $R_0 = 82.06 \text{ атм} \cdot \text{см}^3/(\text{К} \cdot \text{моль})$. Например, для воздуха $R = 2.834 \text{ атм} \cdot \text{см}^3/(\text{К} \cdot \text{г})$.

Рассмотрим тождество Гиббса применительно к модели однородного совершенного газа (4.1). Имеем

$$Tds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (4.2)$$

Подставляя (4.1) в (4.2), получим

$$Tds = de + \rho RT d\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad de = T d(s + R \ln \rho). \quad (4.3)$$

В силу уравнения состояния общего вида $e = e(s, \rho)$ величина de в (4.2) — полный дифференциал. Тогда из (4.3) следует, что e является функцией только $\chi = s + R \ln \rho$, т. е. функцией одной

переменной, а $T = de/d\chi$ — также функция переменной $\chi = s + R \ln \rho$. Таким образом, из (4.3) имеем

$$e = e(\chi) + \text{const}, \quad T = T(\chi) \quad \left(= \frac{de}{d\chi} \right). \quad (4.4)$$

Исключая из (4.4) переменную χ , получим

$$e = e(T) + \text{const}. \quad (4.5)$$

Иначе говоря, внутренняя энергия совершенного газа является функцией только температуры. В частном случае эта функция — линейная:

$$e = c_v T + \text{const}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим энтальпию (далее примем $\text{const} = 0$):

$$h = e + \frac{p}{\rho} = c_v T + RT = (c_v + R) T = c_p T. \quad (4.7)$$

Величины c_v и c_p называются *удельными теплоемкостями* при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно. Формула

$$c_p - c_v = R \quad (4.8)$$

называется *формулой Майера*.

Поясним физический смысл c_v и c_p на простом термодинамическом примере. Рассмотрим систему, состоящую из некоторого объема совершенного газа и применим к ней первый закон термодинамики. Получим

$$de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = dq^{(e)}; \quad (4.9)$$

здесь $dq^{(e)}$ — внешний приток тепла к объему, а $pd(1/\rho)$ — работа внутренних сил над внешними телами (работа расширения). Пусть подвод тепла происходит при постоянном объеме, т. е. $1/\rho = \text{const}$, так как масса постоянна. Тогда

$$de = c_v dT = dq^{(e)}. \quad (4.10)$$

Иначе говоря, c_v означает количество теплоты, которое нужно подвести к совершенному газу, чтобы нагреть его на 1 градус при постоянном объеме.

Будем теперь нагревать газ при сохранении давления. Из (4.9) имеем

$$de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) = de + dRT = c_v dT + R dT = c_p dT = dq^{(e)}. \quad (4.11)$$

Формула (4.11) показывает, что c_p имеет смысл количества теплоты, которое нужно подвести к совершенному газу, чтобы нагреть его на 1 градус при постоянном давлении.

Рассмотрим уравнение состояния совершенного газа в исходных переменных ρ , e , s . Для этого формулы (4.4), (4.5) и (4.6) запишем так

$$e = e(T) = c_v T = c_v \frac{de}{d\chi} \quad (4.12)$$

и проинтегрируем данное дифференциальное уравнение:

$$e = c_v \frac{de}{d\chi}. \quad (4.13)$$

Интеграл уравнения (4.13) имеет вид

$$\chi = c_v \ln e + C = s + R \ln \rho. \quad (4.14)$$

Параметры в некотором состоянии снабдим индексом нуль. Тогда имеем (константа C определяется по параметрам с индексом 0)

$$s - s_0 + R \ln \frac{\rho}{\rho_0} = c_v \ln \frac{e}{e_0}. \quad (4.15)$$

Полагая $e_0 = c_v T_0$ и разрешая (4.15) относительно e , получим

$$e = c_v T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right), \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (4.16)$$

Легко проверить, что задание одной только функции (4.16) полностью определяет *модель совершенного газа с постоянными теплоемкостями*.

Выразим теперь с помощью (4.16) энтропию через плотность и давление, выполнив следующую замену:

$$\frac{e(\chi)}{c_v T_0} = \frac{c_v T}{c_v T_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Имеем

$$\frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1} = \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right), \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} \exp \left(\frac{s - s_0}{c_v} \right). \quad (4.17)$$

Если теперь рассмотрим так называемые изэнтропические движения газа, т.е. такие движения, для которых энтропия

в каждой индивидуальной частице остается постоянной, то из второй формулы (4.17) сразу получим

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (4.18)$$

Величины p_0 , ρ_0 характеризуют некоторое прошлое состояние данной частицы, т. е. также постоянны для нее. Тогда (4.18) запишется так

$$p = C \rho^\gamma. \quad (4.19)$$

Из уравнения притока тепла для идеального газа легко получить, что свойство (4.19) для непрерывных движений соответствует адиабатическому движению, когда $\text{div } \mathbf{q} = 0$, т. е. немеханический приток тепла в жидкую частицу отсутствует.

Лекция 5

СОВЕРШЕННЫЙ ДВУХАТОМНЫЙ ГАЗ С РЕЛАКСАЦИЕЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Закон равнораспределения энергии. Квантовый гармонический осциллятор, формула для колебательной энергии в равновесии. Две независимые локально равновесные подсистемы: поступательно-вращательная и колебательная. Колебательная температура; уравнение для производства энтропии; скорость колебательной релаксации. Полная система уравнений движения невязкого однородного двухатомного газа с колебательной релаксацией.

Закон равнораспределения энергии (газ с постоянными теплоемкостями)

Обратимся к некоторым простейшим сведениям по кинетической теории газов, чтобы ввести несколько более сложную модель реального воздуха.

Как уже отмечалось, модель идеального газа допускает произвольную зависимость внутренней энергии от температуры.

Рассмотрим покоящийся идеальный газ, находящийся в равновесном состоянии. Пусть каждая молекула газа состоит из n атомов. Такая молекула имеет всего $3n$ степеней свободы, из них 3 поступательных, 3 вращательных (для линейных молекул 2) и $3n - 6$ колебательных (для линейных молекул $3n - 5$). Точные методы классической статистики приводят к известному закону равнораспределения, согласно которому на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится величина внутренней энергии $kT/2$, а на каждую колебательную kT . Внутренняя энергия газа на единицу массы получается как сумма вкладов всех степеней свободы молекул, умноженная на число молекул в единице массы газа, равное N/m , где N — число Авогадро, m — молекулярный вес. Так получаем модель совершенного газа с постоянными теплоемкостями.

Закон равнораспределения ограничен областью применимости классического приближения. Это условие для вращательных

и колебательных степеней свободы выглядит так:

$$T \gg T_{\text{вращ.}} = \frac{h^2}{2Ik}, \quad T \gg T_{\text{колеб.}} = T^* = \frac{h\omega}{k}, \quad (5.1)$$

где I — момент инерции молекулы, ω — собственная частота колебаний, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана. Для типичных газов имеем

Газ	$T_{\text{вращ.}}, \text{ K}$	$T_{\text{колеб.}}, \text{ K}$
H ₂	85.4	6100
O ₂	2.07	2230
N ₂	2.85	3340

Из этой таблицы видно, что для воздуха в нормальных условиях нельзя применять классическую формулу для колебательных степеней свободы.

Квантовый гармонический осциллятор, формула для колебательной энергии в равновесии

Уже упоминалось о том, что подходящей моделью молекулы компонент воздуха является абсолютно твердая гантель. При температурах выше нормальной в окрестности T^* подходящей моделью молекул компонент воздуха является квантовый гармонический осциллятор (КГО). Задача о КГО — одна из немногих задач для уравнения Шрёдингера, имеющих точное решение [10]. Опуская выкладки, приведем полученное из этого решения выражение для колебательной энергии единицы массы газа, находящегося в равновесии:

$$e_v = \frac{\theta}{e^\theta - 1} RT, \quad \theta = \frac{T^*}{T}. \quad (5.2)$$

Из (5.2) видно, что при малых T , т. е. при $\theta \gg 1$,

$$e_v \approx \theta e^{-\theta} RT. \quad (5.3)$$

Энергия e_v стремится к нулю очень быстро (как экспонента), и модель КГО переходит в модель жесткой гантели. При больших T , т. е. при $\theta \ll 1$, имеем

$$e_v \approx RT. \quad (5.4)$$

Колебательная энергия стремится к величине, соответствующей закону равнораспределения. Итак, воздух с равновесным возбуждением колебательных степеней свободы молекул дает пример совершенного газа с переменными теплоемкостями.

Выпишем формулу для полной внутренней энергии единицы массы двухатомного газа:

$$e = e_t + e_r + e_v = \frac{3}{2} RT + RT + e_v = \frac{5}{2} RT + e_v(T). \quad (5.5)$$

Как мы уже говорили при изучении уравнений сохранения, можно выписать уравнение баланса для частного вида энергии. Разумеется, в условиях полного равновесия необходимость в уравнении баланса не возникает, так как количество энергии любого вида определяется локальными термодинамическими переменными как, например, в уравнении (5.5).

Две подсистемы: поступательно-вращательная и колебательная

При движении газа могут встретиться такие условия, когда возникают неравновесные распределения полной энергии газа между частными видами энергии. Это может произойти из-за замедленной скорости передачи энергии от одного частного вида к другому.

Пример 1. Пусть некоторый объем двухатомного газа внезапно нагрет, например, путем резкого сжатия в ударной волне. Каковы пути повышения его внутренней энергии? Вначале резко увеличится энергия поступательных и вращательных степеней свободы молекул газа и, следовательно, его температура. После этого путем столкновений энергия поступательных степеней свободы будет постепенно передаваться в колебательное возбуждение; величина e_v будет стремиться к значению (5.2). Опыты показывают, что на передачу энергии от поступательных степеней свободы к колебательным в количестве (5.2) требуется значительное число соударений (до 100 000 в зависимости от условий и типа газа). Данный процесс при движении газа и следует описывать балансовым уравнением, выведенным ранее.

Пример 2. В баллоне, снабженном каналом для истечения газа с заслонкой, газ покоится и нагрет до высокой температуры. После открытия заслонки происходит истечение газа, при этом его внутренняя энергия переходит в кинетическую энергию направленного движения. Прежде всего уменьшается поступательная энергия хаотического движения молекул из-за роста средней скорости, т.е. скорости направленного движения. Вращательная энергия также быстро уменьшается из-за высокой эффективности перехода вращательной энергии в поступательную в столкновениях. В то же время эффективность дезактивации колебательных степеней свободы в столкновениях невелика. Из-

за этого в определенной части канала образуется избыток колебательной энергии по сравнению с ее равновесным значением в уже сильно охлажденном газе (см. формулу (5.3)). На этом опытным факте основано действие газодинамического лазера.

Рассмотрим термодинамику, т. е. уравнение состояния двухатомного газа, находящегося в процессе неравновесного возбуждения (либо дезактивации) его колебательных степеней свободы. Здесь мы пойдем по тому же пути, что и в общем случае. Будем считать, что, несмотря на наличие неравновесных состояний в системе в целом вследствие наличия необратимых процессов перехода поступательной энергии в колебательную, газ в определенном смысле подчиняется закономерностям равновесной термодинамики.

Будем рассматривать газ как две подсистемы, обменивающиеся энергией: первая подсистема представляет собой совокупность поступательной и вращательной степеней свободы всех молекул газа; вторая подсистема — совокупность колебательной степени свободы всех молекул. Подсистемы обмениваются энергией. Будем считать, что, хотя обмен энергией носит неравновесный характер, каждая из подсистем на любом этапе процесса подчиняется закономерностям равновесной термодинамики. Здесь очевидна аналогия с общим подходом. Описание уравнения состояния первой подсистемы дано в предыдущем пункте: это есть совершенный однородный газ с постоянными теплоемкостями. Здесь существует аналогия с неравновесным обменом между различными элементами газового континуума, каждый из которых в то же время остается термодинамически равновесной системой.

Колебательная температура

Рассмотрим термодинамику второй подсистемы. Возможность такого подхода ко второй подсистеме основывается на том опытным факте, что если передача энергии от первой подсистемы ко второй подсистеме замедленна, то распределение уже поступившей энергии во второй подсистеме происходит очень быстро. Это позволяет вернуться к модели квантового гармонического осциллятора, полная колебательная энергия которого теперь уже определяется не общей температурой газа (как в полном равновесии), а колебательной энергией, даваемой как решение уравнения баланса частного вида энергии. Иначе говоря, можно ввести так называемую *колебательную температуру*

второй подсистемы и записать

$$e_v = e_v(T_v) = \frac{\theta_v}{e^{\theta_v} - 1} R T_v, \quad \theta_v = \frac{T^*}{T_v}. \quad (5.6)$$

Величина e_v , как уже говорилось, определяется уравнением баланса.

Запишем термодинамическое тождество Гиббса для второй подсистемы. Очевидно, колебательная степень свободы газа не в состоянии производить работу против внешней среды, так как эта работа связана с передвижением частей газа, т. е. относится к поступательным степеням свободы молекул. Термодинамическое тождество Гиббса тогда принимает вид

$$T_v ds_v = de_v. \quad (5.7)$$

Из (5.7) с помощью (5.6) можно написать уравнение состояния в исходной форме:

$$s_v = \int_0^{T_v} \frac{c_v(T_v) dT_v}{T_v}, \quad c_v(T_v) = \frac{de_v(T_v)}{dT_v}. \quad (5.8)$$

Исключая T_v из (5.6) и (5.8), получим искомое соотношение $s_v = s_v(e_v)$. Для второй подсистемы плотность не входит в уравнение состояния.

Получим теперь термодинамическое тождество для всего газа (первая и вторая подсистемы) и затем уравнение производства полной энтропии. Воспользуемся при этом правилами аддитивности энтропии и внутренней энергии. Напомним, что термодинамическое тождество для первой подсистемы имеет вид

$$T ds_1 = de_1 + p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (5.9)$$

Сложим (5.7) и (5.9):

$$T ds_1 + T_v ds_v = de_1 + de_v + p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (5.10)$$

Пусть $s = s_1 + s_v$, $e = e_1 + e_v$. Имеем

$$\begin{aligned} T ds_1 + T_v ds_v &= T ds_1 + T ds_v - T ds_v + T_v ds_v = \\ &= T ds + (T_v - T) ds_v. \end{aligned}$$

Получим из (5.10)

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + (T - T_v) ds_v, \quad (5.11)$$

или

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{T - T_v}{T_v} de_v. \quad (5.12)$$

Имеем термодинамическое тождество Гиббса для всего газа. Запишем уравнение для производства энтропии.

Как и ранее, запишем с этой целью выражение (5.12) для жидкой частицы. Получим

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{T - T_v}{T_v} \frac{de_v}{dt}. \quad (5.13)$$

Пусть для простоты теплопроводность и вязкость в рассматриваемом газе отсутствуют. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} &= 0, \\ \rho \frac{de_v}{dt} &= \omega_v. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подставляя (5.14) в (5.13), получим

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{T - T_v}{\rho T_v} \omega_v, \quad (5.15)$$

где ω_v — скорость возбуждения колебательной степени свободы (т.е. скорость передачи энергии поступательных и вращательных степеней свободы колебательным). В данном случае все производство энтропии газа происходит за счет одного неравновесного процесса — возбуждения колебаний.

Здесь $T - T_v$ — термодинамическая сила, ω_v — термодинамический поток.

На основании общей теории можно заключить, что

$$\omega_v = l_v(T - T_v). \quad (5.16)$$

Из приближенных решений квантовомеханической задачи о возбуждении гармонического осциллятора получается следующая формула для скорости возбуждения колебаний молекулы

в столкновениях:

$$\omega_v = \rho \frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau}, \quad (5.17)$$

где τ — время релаксации, для которого известна приближенная формула Ландау–Теллера

$$\tau = \frac{A(T)}{p} \exp(\alpha T^{-1/3}), \quad (5.18)$$

$A(T)$ — медленная функция температуры. Если T и T_v близки (колебательное возбуждение близко к равновесию), то можно записать

$$e_v(T_v) = e_v(T) + (T_v - T) c_v(T) + O[(T_v - T)^2],$$

$$c_v(T) = \frac{de_v}{dT_v}. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.19) в (5.17), получим

$$\omega_v = \rho c_v(T) \frac{T - T_v}{\tau(p, T)}. \quad (5.20)$$

Сравнивая (5.20) с (5.16), получим

$$l_v = \frac{\rho c_v(T)}{\tau(p, T)}. \quad (5.21)$$

Выпишем, наконец, полную систему уравнений движения однородного совершенного газа с неравновесным возбуждением колебаний (без учета вязкости и теплопроводности).

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.22)$$

Уравнение движения:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p. \quad (5.23)$$

Уравнение притока тепла:

$$\frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} = 0. \quad (5.24)$$

Уравнение состояния:

$$e = \frac{5}{2} RT + e_v, \quad p = \rho RT. \quad (5.25)$$

Уравнение возбуждения колебательной энергии:

$$\rho \frac{de_v}{dt} = \omega_v \quad (5.26)$$

(с одним из приведенных выше выражений для ω_v). Очевидно, «вторичные» уравнения состояния (5.25) можно заменить одним «первичным», которое имеет вид

$$s = s_1 + s_v = s_1(\rho, e_1) + s_v(e_v), \quad (5.27)$$

где s_1 определяется из (4.16), а s_v — из (5.8), (5.6).

Лекция 6

ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩАЯ СМЕСЬ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Уравнение состояния. Кинетическая теория скоростей химических реакций. Бинарная смесь. Идеально диссоциирующий газ.

При температурах порядка нескольких тысяч градусов компоненты воздуха вступают в химические реакции. Поэтому при движении тел с очень большими скоростями в окрестности тела движется химически реагирующая смесь. Задачи о химически активных газовых потоках встречаются во многих приложениях. Это и теория детонации, и движение газа в каналах реактивных двигателей, а также ряд новых проблем, связанных с охраной водного и воздушного бассейнов.

Рассмотрим многокомпонентную химически реагирующую смесь идеальных газов. Существуют два основных режима протекания химических реакций: равновесный и неравновесный. Равновесное протекание химических реакций, как и любое другое равновесное состояние, устанавливается при условии, что реагирующая система пребывает в фиксированном состоянии столько угодно долго. При этом концентрации реагирующих компонент, естественно, остаются постоянными и определяются термодинамическими параметрами среды.

При движении газа термодинамическое состояние элемента газовой среды непрерывно изменяется. Поэтому равновесное протекание химических реакций в таком элементе возможно лишь при условии, что характерное время такого изменения много больше характерного времени химических реакций, точнее, самой медленной химической реакции. Иначе говоря, изменения должны происходить «бесконечно медленно» по отношению ко времени протекания химических реакций. Возможны и промежуточные условия, когда часть реакций в определенном газовом потоке можно считать быстрыми, а другую часть медленными.

Кинетический механизм большинства химических реакций состоит в столкновениях молекул. Как и в случае возбуждения, далеко не каждое столкновение приводит к реакции. Именно поэтому на протекание реакции до определенной стадии тре-

буется конечное время. Если это время сопоставимо с характерным временем течения, то говорят о неравновесном режиме протекания химических реакций. В этом случае число молекул каждой компоненты, или концентрация, становится независимой характеристикой локального состояния сплошной среды. Для ее определения необходимо использовать уравнение сохранения массы i -й компоненты (2.8).

Уравнение состояния

Переходим к формулировке уравнения состояния. Как и в предыдущей лекции, будем рассматривать каждый элемент континуума многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси как совокупность n химически чистых подсистем, каждая из которых находится в состоянии локального термодинамического равновесия. Одновременно считается, что равновесие между подсистемами отсутствует: концентрация каждой компоненты смеси определяется уравнениями (2.8).

Напомним, что каждая компонента смеси является идеальным газом. Парциальные давления p_i удовлетворяют уравнению Клапейрона

$$p_i = \rho_i \frac{R_0}{m_i} T. \quad (6.1)$$

Справедлив закон Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^N p_i. \quad (6.2)$$

Поскольку каждая компонента находится в состоянии локального термодинамического равновесия, справедливо тождество Гиббса

$$T ds_i = de_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right). \quad (6.3)$$

В силу правил аддитивности энтропия и внутренняя энергия единицы массы смеси определяются следующим образом:

$$\rho s = \sum_{i=1}^N \rho_i s_i, \quad s = \sum_{i=1}^N \alpha_i s_i, \quad \rho e = \sum_{i=1}^N \rho_i e_i, \quad e = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i. \quad (6.4)$$

Умножим (6.3) на α_i и просуммируем по всем i . С учетом (6.2) и (6.4) получим

$$T \alpha_i ds_i = \alpha_i de_i + p_i \alpha_i d\left(\frac{1}{\rho_i}\right), \quad (6.5)$$

$$T d\alpha_i s_i = d\alpha_i e_i + p_i d\left(\frac{1}{\rho}\right) - e_i d\alpha_i + T s_i d\alpha_i - \frac{p_i}{\rho_i} d\alpha_i,$$

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sum_{i=1}^N \left(e_i + \frac{p_i}{\rho_i} - T s_i\right) d\alpha_i.$$

Коэффициент при $d\alpha_i$ в последнем слагаемом в правой части (6.5) называют *химическим потенциалом i -й компоненты*:

$$\mu_i = e_i + \frac{p_i}{\rho_i} - T s_i = h_i - T s_i. \quad (6.6)$$

Окончательно формула (6.5) принимает вид

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sum_{i=1}^N \mu_i d\alpha_i. \quad (6.7)$$

Среди α_i имеется $N - 1$ независимых величин, так как имеет место $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. Таким образом, данная модель определяется набором $N + 1$ независимых параметров e , ρ , α_i . Уравнение состояния такой среды должно иметь вид

$$s = s(e, \rho, \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6.8)$$

Конкретная форма (6.8) получается с помощью уравнения Клапейрона (6.1), соотношений (6.4) и зависимостей внутренних энергий компонент e_i от температуры. Вместо (6.8) для смеси химически реагирующих идеальных газов обычно рассматривают результат суммирования (6.1)

$$p = \rho \frac{R_0}{m} T, \quad (6.9)$$

где $\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{m_i}$, m — молекулярный вес смеси, и формулу для внутренней энергии e

$$e = \sum_{i=1}^N e_i(T) \alpha_i, \quad (6.10)$$

где $e_i(T)$ определяется по правилам, описанным ранее, в зависимости от молекулярных свойств i -й компоненты.

Уравнение для производства энтропии химически реагирующей смеси s было получено в лекции 3 (см. уравнение (3.8)).

В случае отсутствия диффузии компонент, а также в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью уравнение (3.8) принимает вид

$$\rho \frac{ds}{dt} = - \sum_{j=1}^r \frac{A_j}{T} \omega_j. \quad (6.11)$$

Неравновесные химические реакции приводят к изменению суммарной энтропии смеси.

В соответствии с общей теорией, изложенной ранее, о линейных связях компонент термодинамических потоков и термодинамических сил, из (6.11) можно получить формулы для скоростей химических реакций ω_j . Эти скорости выражаются линейно через химические сродства реакций

$$\omega_j = \sum_{k=1}^r l_{jk} A_k. \quad (6.12)$$

Определением кинетических коэффициентов l_{ik} построение модели многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси полностью завершается.

Кинетическая теория скоростей химических реакций

Как и в случае предыдущей модели, сопоставим результат (6.12) с данными кинетической теории скоростей химических реакций, основанной на подсчете неупругих столкновений. Для упрощения выкладок рассмотрим бинарную атомно-молекулярную смесь, в которой идет одна реакция диссоциации-рекомбинации



где X — любая частица, атом M или молекула M_2 . Уравнения для концентраций (2.8) и уравнения состояния (6.9), (6.10) легко упрощаются для этого частного случая. Предоставим возможность сделать это читателю. Здесь мы займемся только скоростью реакции (6.13) и ее связью с химическим сродством. Полная скорость реакции (6.13) равна разности скоростей реакций в прямом и обратном направлении:

$$\omega = \omega_+ - \omega_-. \quad (6.14)$$

Здесь ω_+ — скорость диссоциации, ω_- — скорость рекомбинации. Скорость диссоциации равна числу столкновений в единице объема за единицу времени, приводящих к разделению молекулы на два атома. В идеальном газе столкновение можно рас-

смаатривать как сложное событие из двух независимых событий, каждое из которых состоит в пребывании одного из участников реакции в данной точке пространства. Вероятность каждого из таких событий пропорциональна числу частиц i -го сорта в единице объема n_i . Поэтому количество столкновений пропорционально произведению величин n_i . Аналогично подсчитываются скорости всех реакций в идеальном газе. Итак,

$$\omega_+ = k_d n_2 n, \quad \omega_- = k_r n_1^2 n, \quad n = n_1 + n_2, \quad (6.15)$$

Здесь индекс 1 обозначает атомы, 2 — молекулы; k_d и k_r — коэффициенты пропорциональности, зависящие от температуры. Имеем

$$\omega = k_d n_2 n - k_r n_1^2 n = k_r n \left(\frac{k_d}{k_r} n_2 - n_1^2 \right). \quad (6.16)$$

С помощью уравнений состояния определим теперь зависимость числа частиц n_i от химического сродства. Из определения (6.6) и уравнений состояния идеального газа (4.7), (4.14) получим

$$\begin{aligned} \mu_i &= h_i - T s_i = c_{pi} T - T C_i - c_{vi} T \ln c_{vi} T + R_i T \ln (m_i n_i) = \\ &= R_i T \ln n_i + \varphi_i(T), \end{aligned} \quad (6.17)$$

причем $\varphi_i(T)$ содержит только молекулярные константы i -й компоненты (C_i , c_{vi} , m_i) и температуру. Общая формула связи химического сродства реакции с химическим потенциалом (формула (3.6)) для бинарной смеси ($m_1 = m$, $m_2 = 2m$) дает

$$A = 2m (\mu_1 - \mu_2). \quad (6.18)$$

Выразим из (6.17) n_i через μ_i и подставим в (6.16). С учетом (6.18) получим

$$\begin{aligned} \omega &= k_r n n_1^2 \left[\frac{k_d}{k_r} \exp \left(\frac{\mu_2 - \varphi_2}{R_0 T} 2m \right) \exp \left(-\frac{\mu_1 - \varphi_1}{R_0 T} 2m \right) - 1 \right], \\ \omega &= k_r n n_1^2 \left[\frac{k_d}{k_r} \exp \left(2m \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 T} \right) \exp \left(-\frac{A}{R_0 T} \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Из выражения (3.10) для ω_s следует, что в состоянии полного равновесия должно быть $A = 0$, так как ω_s в равновесии должно обращаться в нуль. Кроме того, в равновесном состоянии выра-

жение в квадратных скобках в (6.19) также равно нулю, поскольку скорости прямой и обратной реакций одинаковы. Отсюда

$$\frac{k_d}{k_r} \exp \left(2m \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 T} \right) = 1. \quad (6.20)$$

Отношение

$$\frac{k_d}{k_r} = K_e(T) = \exp \left(-2m \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_0 T} \right) \quad (6.21)$$

является функцией только температуры и называется *константой равновесия реакции*.

Поскольку левая часть (6.20) не зависит от концентраций, это соотношение можно считать справедливым и при неравновесном протекании реакций в рассматриваемой модели химически реагирующих идеальных газов. Тогда формула (6.19) запишется так:

$$\omega = k_r n n_1^2 \left[\exp \left(-\frac{A}{R_0 T} \right) - 1 \right]. \quad (6.22)$$

Вблизи равновесия, т. е. при $A/R_0 T \ll 1$, выражение в квадратных скобках можно разложить в ряд и получить

$$\omega = -k_r(T) n n_1^2 \frac{A}{R_0 T}, \quad (6.23)$$

т. е. скорость реакции пропорциональна величине химического сродства, как это следует из общего подхода в термодинамике необратимых процессов, выраженного формулой (6.12). Концентрации n_i в (6.23) вычисляются, естественно, в состоянии равновесия.

Итак, химическая кинетика дает более общие выражения для скоростей химических реакций, чем принципы термодинамики необратимых процессов.

Идеально диссоциирующий газ

Для приближенного исследования движения диссоциирующего воздуха в литературе часто употребляется модель идеально диссоциирующего газа, предложенная Лайтхиллом [12]. Модель представляет собой некоторое упрощение формул, приведенных в данной лекции.

Газ считается бинарной смесью атомов и молекул. Уравнение состояния (6.9) принимает вид

$$p = \rho \frac{R_0(1 + \alpha)}{2m} T, \quad (6.24)$$

где $\alpha = \rho_1/\rho$ — концентрация атомарной компоненты, m — атомный вес. Предполагается, что колебательная степень свободы молекулярной компоненты возбуждена наполовину своего предельного значения, т. е.

$$e_v(T) = \frac{1}{2} \frac{R_0}{2m} T. \quad (6.25)$$

При этом формула для внутренней энергии смеси (6.10) принимает вид

$$e = e_1 \alpha + e_2 (1 - \alpha) = \left(\frac{3}{2} \frac{R_0}{m} T + h^0 \right) \alpha + \\ + \left(\frac{3}{2} \frac{R_0}{2m} T + \frac{R_0}{2m} T + \frac{1}{2} \frac{R_0}{2m} T \right) (1 - \alpha), \quad (6.26)$$

$$e = \frac{3}{2} \frac{R_0}{m} T + h^0 \alpha,$$

где h^0 — энергия диссоциации. Удобно записать (6.26) через температуру диссоциации T_d :

$$\frac{e}{h^0} = 3 \frac{T}{T_d} + \alpha, \quad T_d = \frac{h^0}{R_0/(2m)}. \quad (6.27)$$

Константа равновесия $K_e(T)$ (6.21) аппроксимируется следующей формулой:

$$K_e(T) = \frac{2\rho_d}{m} \exp\left(-\frac{T_d}{T}\right); \quad (6.28)$$

здесь ρ_d — так называемая плотность диссоциации. Для компонент воздуха рекомендуются следующие значения:

Газ	T_d , К	ρ_d , г/см ³
O ₂	59 000	150
N ₂	113 000	130

Константа скорости рекомбинации в модели идеально диссоциирующего газа обычно принимается в виде степенной функции температуры

$$k_r = A T^{-s} \quad (s > 0).$$

Наконец, выпишем скорость химической реакции (6.16) в принятых здесь переменных:

$$\omega = k_r(T) (1 - \alpha^2) \frac{\rho^3}{2m^3} \left[K_e(T) \frac{m}{2\rho} - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \right]. \quad (6.29)$$

Итак, в лекциях 4–6 мы рассмотрели три конкретных примера применения общего подхода к построению моделей сжимаемой сплошной среды. Эти модели наиболее употребительны в приложениях газовой динамики в различных областях науки и техники. Кроме того, в общетеоретических исследованиях свойств течений сжимаемого газа часто употребляется так называемая *двупараметрическая модель*, обладающая основными чертами модели совершенного газа с постоянными теплоемкостями, однако не ограниченная конкретным видом уравнения состояния в основных переменных s , e , ρ . Иначе говоря, вместо уравнения состояния (4.16) рассматривается более общая функция двух переменных $s = s(e, \rho)$, на которую, тем не менее, накладываются некоторые ограничения. Такой подход широко используется, например, в одном из недавно вышедших учебников по газовой динамике [26]. В наших лекциях двупараметрическая модель также будет использована в ряде разделов (теория звука, теория ударных волн, гиперзвуковые течения и т. п.). Однако автор считает, что ограничение только двупараметрической моделью оставляет вне поля зрения исследователей огромное множество реальных газодинамических явлений.

Лекция 7

ТЕОРИЯ ЗВУКА. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА В РЕЛАКСИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

Звук в газе без релаксации. Решение Даламбера. Звук в релаксирующем газе. Уравнение распространения малых возмущений. Предельные случаи. Дисперсионное соотношение. Дисперсия и поглощение. Зависимость фазовой скорости и коэффициента затухания от параметра релаксации.

Рассмотрим движение газа с малыми возмущениями. Будем считать, что основное состояние отвечает состоянию покоя, а амплитуды возмущений и их производные по времени и координатам малы, так что произведениями указанных величин и их степенями выше первой можно пренебречь. Вязкостью и теплопроводностью пренебрегается.

Звук в газе без релаксации

Запишем уравнение состояния в форме, связывающей энтропию, давление и плотность. Считается, что энтропия каждой частицы газа остается постоянной во все время движения. Поскольку в начальный момент энтропия считается одинаковой для всего газа, таковой она останется и в последующие моменты времени. Система уравнений движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \quad p = p(\rho, s), \quad s = \text{const.} \quad (7.1)$$

Будем искать решение, слабо отклоняющееся от состояния покоя. Положим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'. \quad (7.2)$$

Подставляя (7.2) в (7.1) и отбрасывая малые величины порядка выше первого, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' = 0, \quad p' = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \rho'. \quad (7.3)$$

Уравнения (7.3) описывают нестационарное движение газа с малыми возмущениями.

Из второго уравнения (7.3) видно, что $\partial(\text{rot } \mathbf{v}')/\partial t = 0$, т. е. выражение $\text{rot } \mathbf{v}' = f(x, y, z)$ не зависит от времени. Принимаем, что в начальный момент времени $\text{rot } \mathbf{v}' = 0$. Тогда течение будет безвихревым, и можно принять

$$\mathbf{v}' = \text{grad } \varphi, \quad (7.4)$$

т. е. ввести потенциал скорости. Подставляя (7.4) во второе уравнение (7.3), получим

$$\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p' = 0, \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (7.5)$$

при соответствующих граничных условиях. Первое уравнение в (7.3) принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0. \quad (7.6)$$

Обозначим $a^2 = \partial p / \partial \rho|_s$. Исключая p' из третьего уравнения (7.3) и второго уравнения (7.5) и подставляя ρ' в (7.6), получим волновое уравнение для потенциала скорости

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi = 0. \quad (7.7)$$

Рассмотрим для простоты одномерное течение (точнее, течение с плоскими волнами). Пусть все величины зависят только от одной координаты x и времени t :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (7.8)$$

Вводя характеристические переменные $\xi = x - at$, $\eta = x + at$, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (7.9)$$

Общее решение этого уравнения содержит две произвольные функции

$$\varphi = f_1(x - at) + f_2(x + at). \quad (7.10)$$

Решение представляет собой сумму двух функций типа бегущей волны. Произвольная функция f_1 имеет одинаковые значения в двух точках, x_1 и x_2 , в моменты времени t_1 и t_2 , связанные соотношением

$$x_1 - at_1 = x_2 - at_2. \quad (7.11)$$

Отсюда следует, что расстояние $x_2 - x_1$ проходится фазой волны (т. е. заданным значением функции f_1) за время $t_2 - t_1$ со скоростью a . Величина $a = (\partial p / \partial \rho|_s)^{1/2}$ называется *скоростью звука*. Аналогично, f_2 описывает волну, бегущую в отрицательном направлении оси x .

Рассмотрим частный случай — монохроматическую бегущую волну. Решение задается в виде

$$\varphi = A \exp [i(kx - \omega t)]. \quad (7.12)$$

Здесь k — волновое число, ω — частота волны, A — амплитуда. Подставляя (7.12) в (7.8), получим

$$\frac{\omega^2}{k^2} = a^2, \quad \varphi = A \exp [ik(x \pm at)]. \quad (7.13)$$

Первая формула (7.13) называется *дисперсионным соотношением*. Из нее следует, что любая монохроматическая волна независимо от ее частоты движется с одной и той же скоростью a . Впрочем, этот результат непосредственно вытекает из общего решения (7.10).

Звук в релаксирующем газе

Рассмотрим теперь распространение звука в газе с релаксацией. В качестве модели газа используем модель сжимаемой среды, описывающую течение совершенного двухатомного газа с колебательной релаксацией. Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \quad \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0, \\ h &= c_p T + e_v(T_v), \quad p = \rho R T, \quad \frac{de_v}{dt} = \frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau(p, T)}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Здесь уравнение релаксации (последнее уравнение (7.14)) взято в нелинейной форме. Исключим из третьего уравнения энтальпию h . Цепочка формул имеет вид

$$\begin{aligned} h &= \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} + e_v(T_v) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + e_v(T_v), \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{de_v}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены и деля на коэффициент при dp/dt , получим

$$\frac{dp}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} + \rho(\gamma - 1) \frac{de_v}{dt} = 0, \quad a_f^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (7.15)$$

Напомним, что величина $\gamma = c_p/c_v$ содержит теплоемкости, относящиеся только к первой подсистеме, т. е. к поступательным и вращательным (активным) степеням свободы молекул. Поэтому далее будем величину a_f называть *замороженной скоростью звука*.

Для получения решения с малыми возмущениями положим

$$v = v', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = T_0 + T', \quad T_v = T_0 + T'_v. \quad (7.16)$$

Рассматриваются малые возмущения однородного равновесного состояния покоя, поэтому $T_{v0} = T_0$, хотя возмущения колебательной температуры T_v отличаются от возмущений поступательной температуры T .

Подставим (7.16) в (7.14), (7.15) и, отбрасывая малые величины второго порядка и выше, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v' &= 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' = 0, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} - a_f^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0(\gamma - 1) \dot{e}_v \frac{\partial T'_v}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial T'_v}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0} (T' - T'_v), \quad \frac{T'}{T_0} = \frac{p'}{p_0} - \frac{\rho'}{\rho_0} \left(\dot{e}_v = \left. \frac{de_v}{dT_v} \right|_{T_v=T_0} \right).$$

Коэффициенты a_f^2 и $\dot{e}_v$ вычисляются, очевидно, в состоянии покоя. Здесь $\dot{e}_v$ — теплоемкость второй подсистемы, т. е. теплоемкость колебательных степеней свободы. Из второго уравнения (7.17), как и ранее, очевиден безвихревой характер движения. Снова введем потенциал скорости

$$v' = \operatorname{grad} \varphi. \quad (7.18)$$

Первые два уравнения (7.17) дают

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, \quad p' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7.19)$$

Из оставшихся трех уравнений (7.17) исключим возмущения T' и T'_v . Вначале исключим T' :

$$\frac{\partial T'_v}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{T_0}{p_0} p' - \frac{T_0}{\rho_0} \rho' - T'_v \right). \quad (7.20)$$

Продифференцируем по t третье уравнение (7.17) и уравнение (7.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_f^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \rho_0(\gamma - 1) \dot{e}_v \frac{\partial^2 T'_v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 T'_v}{\partial t^2} &= \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{T_0}{p_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{\partial T'_v}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Исключим из этих двух уравнений $\partial^2 T'_v / \partial t^2$, а производную $\partial T'_v / \partial t$ подставим из третьего уравнения (7.17). Приводя подобные члены, получим

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_f^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_0} \left[\left(\lambda \frac{T_0}{p_0} + 1 \right) \frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\lambda \frac{T_0}{\rho_0} + a_f^2 \right) \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right] = 0, \quad (7.22)$$

где $\lambda = \rho_0(\gamma - 1) \dot{e}_v$. Подставляя сюда (7.19), получим искомое уравнение для потенциала

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_f^2 \Delta \varphi \right) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_e^2 \Delta \varphi \right) = 0. \quad (7.23)$$

Здесь приняты обозначения

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{\lambda T_0}{p_0} + 1 \right)^{-1}, \quad a_e^2 = \left(\frac{\lambda T_0}{\rho_0} + a_f^2 \right) \left(\frac{\lambda T_0}{p_0} + 1 \right)^{-1}.$$

Упростим эти выражения:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 \left(\frac{\lambda T_0}{p_0} + 1 \right)^{-1} = \frac{\tau_0 p_0}{\rho_0(\gamma - 1) \dot{e}_v T_0 + p_0} = \\ &= \frac{\tau_0 \rho_0 R T_0}{\rho_0(\gamma - 1) \dot{e}_v T_0 + \rho_0 R T_0} = \frac{\tau_0 c_v}{c_v + \dot{e}_v} = \tau_0 \frac{c_{vf}}{c_{ve}}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Здесь c_v — теплоемкость при постоянном объеме для первой подсистемы, т. е. для активных степеней свободы, c_{ve} — суммар-

ная теплоемкость при постоянном объеме, равная теплоемкости среды в состоянии полного равновесия. Аналогично,

$$\begin{aligned} a_e^2 &= \frac{\lambda T_0 + a_f^2 \rho_0}{\lambda T_0 + p_0} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\rho_0(\gamma - 1)\dot{e}_v T_0 + \gamma p_0}{\rho_0(\gamma - 1)\dot{e}_v T_0 + p_0} \frac{p_0}{\rho_0} = \\ &= \frac{\dot{e}_v \rho_0 R T_0 + c_p p_0}{\dot{e}_v \rho_0 R T_0 + c_v p_0} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{c_p + \dot{e}_v}{c_v + \dot{e}_v} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{c_{pe}}{c_{ve}} \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma_e \frac{p_0}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Здесь c_{pe} — теплоемкость равновесной среды при постоянном давлении.

Таким образом, коэффициент a_e^2 имеет ту же структуру, что и a_f^2 , только отношение теплоемкостей γ_e вычисляется в состоянии полного термодинамического равновесия. Величину a_e^2 называют *равновесной скоростью звука*. Из формулы (7.25) следует неравенство $a_f > a_e$.

Отметим, что левая часть уравнения для потенциала скорости при малых возмущениях (7.23) имеет вид дифференциально-линейной комбинации волновых операторов с различными скоростями звука a_f и a_e .

Рассмотрим предельные формы уравнения (7.23) при больших и малых значениях времени релаксации τ . Пусть $\tau \rightarrow \infty$, т.е. процесс релаксации протекает медленно (по сравнению со временем изменения параметров в звуковой волне). Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_f^2 \Delta \varphi = 0, \quad (7.26)$$

если начальное состояние отвечает этому условию. Возмущение распространяется с замороженной скоростью звука a_f . Пусть $\tau \rightarrow 0$, т.е. процесс релаксации протекает быстро. Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_e^2 \Delta \varphi = 0, \quad (7.27)$$

т.е. возмущение распространяется с равновесной скоростью звука: состояние газа даже при наличии звукового возмущения отвечает локальному термодинамическому равновесию.

Дисперсионное соотношение

Рассмотрим одномерный аналог уравнения для потенциала возмущенного течения (7.23)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_f^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_e^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (7.28)$$

Будем искать его решение в виде монохроматической бегущей волны

$$\varphi = A \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (7.29)$$

Подставляя (7.29) в (7.28), получим *дисперсионное соотношение*

$$-i\omega(-\omega^2 + a_f^2 k^2) + \frac{1}{\tau}(-\omega^2 + a_e^2 k^2) = 0. \quad (7.30)$$

Решение (7.29) описывает распространение по координате x малых колебаний, возбуждаемых каким-либо устройством, например, поршнем, колеблющимся в начале координат с частотой ω . Имеется в виду развитая стадия процесса, когда колебания уже распространились далеко от источника. Свойства этого процесса в рамках решения (7.29) определяются величиной волнового числа k . Выразим его из (7.30)

$$k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{a_e^2 - i\omega\tau a_f^2}}. \quad (7.31)$$

Отметим два обстоятельства. Во-первых, волновое число k является комплексной величиной $k = k_1 + ik_2$. Подставляя это представление k в (7.29), получим

$$\varphi = A \exp(-k_2 x) \exp\left\{i k_1 \left(x - \frac{\omega}{k_1} t\right)\right\}. \quad (7.32)$$

Ниже будет показано, что $k_2 > 0$. Таким образом, в процессе распространения колебаний вдоль оси x происходит уменьшение первоначальной амплитуды, т.е. затухание колебаний с коэффициентом затухания k_2 . Во-вторых, фазовая скорость волны равна величине ω/k_1 ; она определяется не только коэффициентами уравнения (7.28), но и частотой ω . Зависимость фазовой скорости от частоты называется *дисперсией*.

Перейдем к количественному описанию указанных явлений. Отметим прежде всего, что величина k/ω зависит от частоты через произведение $\omega\tau$. Поэтому отмеченная выше зависимость решения от частоты в определенном смысле аналогична зависимости от времени релаксации τ .

Рассмотрим вначале асимптотические представления решения (7.31). Пусть $\omega\tau \ll 1$; при фиксированном τ это соответствует длинным волнам. Пренебрегая членами $(\omega\tau)^2$ и выше, получим

$$k = \frac{\omega}{a_e} + i \frac{\omega}{a_e} \frac{\omega\tau}{2a_e^2} (a_f^2 - a_e^2). \quad (7.33)$$

Фазовая скорость длинных волн совпадает с равновесной скоростью звука $\omega/k_1 = a_e$. Коэффициент затухания пропорциона-

лен разности $a_f - a_e > 0$. В другом предельном случае $\omega\tau \gg 1$ (короткие волны при $\tau = \text{const}$) в том же приближении имеем

$$k = \frac{\omega}{a_f} + i \frac{1}{2\tau a_f^3} (a_f^2 - a_e^2). \quad (7.34)$$

Как и следовало ожидать, фазовая скорость коротких волн равна замороженной скорости звука a_f . Коэффициент затухания также пропорционален разности $a_f - a_e > 0$.

Точные выражения для k_1 и k_2 следует определить из (7.31). Используем тригонометрическую форму комплексного числа, записав $k = \omega m e^{i\theta}$. Приводя выражение под радикалом в (7.31) к нормальной форме

$$k = \omega \left[\frac{a_e^2 + (\omega\tau)^2 a_f^2 - i \omega\tau a_e^2 + i \omega\tau a_f^2}{a_e^4 + (\omega\tau)^2 a_f^4} \right]^{1/2} = \omega \sqrt{a + ib}$$

и учитывая, что модуль m равен квадратному корню из модуля комплексного числа $a + ib$, а аргумент θ равен половине аргумента числа $a + ib$, получим

$$m = \left(\frac{1 + (\omega\tau)^2}{a_e^4 + (\omega\tau)^2 a_f^4} \right)^{1/4}, \quad 2\theta = \text{arctg} \frac{\omega\tau(a_f^2 - a_e^2)}{a_e^2 + (\omega\tau)^2 a_f^2}, \quad (7.35)$$

$$k_1 = m\omega \cos \theta, \quad k_2 = m\omega \sin \theta.$$

Точные формулы для фазовой скорости $c = \omega/k_1$ и коэффициента затухания k_2 имеют весьма громоздкий вид. Следуя монографии [9], проведем упрощения формул с учетом близости предельных скоростей звука. Для рассматриваемой модели отношение

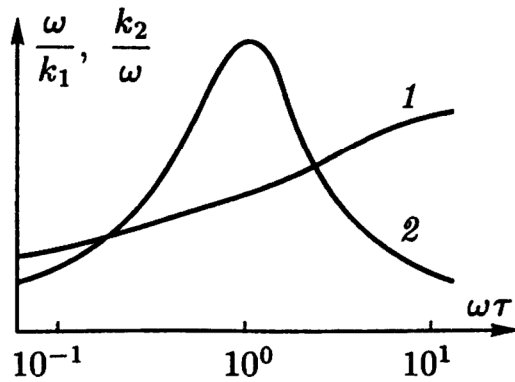
$$a^2 = \frac{a_f^2}{a_e^2} = \frac{\gamma_f}{\gamma_e}$$

не превышает величины $49/45 \approx 1.1$. Аналогичные данные для диссоциации двухатомного газа приведены в упомянутой монографии; отношение скоростей звука не превышает 1.2. Из второй формулы (7.35) легко показать, что $\text{tg}(2\theta)$ имеет максимум при $\omega\tau = a_e/a_f$, равный

$$\frac{a_f^2 - a_e^2}{2 a_f a_e},$$

т.е. $\text{tg}(2\theta)$ всюду имеет порядок разности скоростей звука. Поэтому с учетом приведенных выше оценок можно положить

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \quad \theta = \frac{\omega\tau (a_f^2 - a_e^2)}{2 (a_e^2 + (\omega\tau)^2 a_f^2)}.$$



Качественное изменение фазовой скорости

$$\frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{m}$$

(кривая 1) и относительного коэффициента затухания

$$\frac{k_2}{\omega} = m\theta$$

Рис. 7.1. Фазовая скорость ω/k_1 (кривая 1) и коэффициент затухания k_2/ω (кривая 2)

(кривая 2) в зависимости от $\omega\tau$ приведено на рис. 7.1. Фазовая скорость монотонно изменяется между предельными значения-

ми. Коэффициент затухания при малых и больших $\omega\tau$ стремится к нулю.

Обсудим кратко эволюцию малого возмущения произвольного профиля в релаксирующем газе. Пусть для простоты начальное возмущение, т. е. звук при $t = 0$, занимает конечный интервал оси x . Легко себе представить, что возмущение произвольного профиля содержит как высокочастотные, так и низкочастотные составляющие типа (7.29). При движении такого возмущения в силу (7.33), (7.34) будет происходить затухание всех составляющих, т. е. начальная амплитуда возмущения будет уменьшаться. Далее, вследствие дисперсии будет происходить расслоение начального возмущения на высокочастотные и низкочастотные составляющие. Иначе говоря, по прошествии некоторого времени, когда свойства начального возмущения будут «забыты», установится режим, в котором передний фронт возмущения будет двигаться со скоростью a_f , а задний фронт — со скоростью a_e . Поскольку $a_f > a_e$, область, занятая возмущением, будет увеличиваться.

Лекция 8

ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА. ХАРАКТЕРИСТИКИ

Характеристики. Инварианты Римана. Изэнтропическое течение. Случай совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Течение типа простой волны.

Рассмотрим нестационарное непрерывное адиабатическое течение двупараметрического невязкого газа с плоскими волнами произвольной амплитуды. Рассмотрение плоских волн позволяет оставить лишь одну пространственную переменную x и одну компоненту скорости v . Уравнения движения газа имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (8.3)$$

$$s = s(p, \rho). \quad (8.4)$$

Неизвестные функции: v , p , ρ , s . Очевидно, уравнение состояния (8.4) можно переписать в форме $p = p(\rho, s)$. Вычислим полную производную от уравнения состояния:

$$\frac{dp}{dt} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{d\rho}{dt} + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho \frac{ds}{dt}. \quad (8.5)$$

В силу (8.3) $ds/dt = 0$. Вспоминая, что $a^2 = \partial p / \partial \rho|_s$, и раскрывая оператор d/dt , запишем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0. \quad (8.6)$$

Уравнения (8.1), (8.2) и (8.6) составляют замкнутую систему уравнений для неизвестных v , p , ρ (здесь a^2 — известная функция p и ρ).

Характеристики

Пусть $x = x(t)$ — некоторая линия в плоскости (x, t) ; ее касательная в каждой точке определяет направление. Будем называть *производной по направлению от функции* $u = u(x, t)$ следующее выражение:

$$\frac{d}{dt} [u(x(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.7)$$

Уравнения (8.1), (8.2) и (8.6) содержат производные от искомых функций по x и t . Путем линейных комбинаций этих уравнений с коэффициентами, зависящими от x, t , и искомых функций (но не их производных) можно записать эти уравнения в виде, содержащем производные по другим направлениям в плоскости (x, t) . В частности, иногда можно привести уравнения к таким направлениям, что каждое из уравнений преобразованной системы будет содержать производные искомых функций лишь по одному направлению. Если к такому виду можно привести все уравнения, то исходная система называется *гиперболической*, а указанные направления *характеристическими*. Линии в плоскости (x, t) , задающие эти направления, называются *характеристиками*.

Проведем описанное выше преобразование для произвольной квазилинейной системы первого порядка с двумя независимыми переменными:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.8)$$

Умножим уравнения (8.8) на коэффициенты l_i и просуммируем по i :

$$\sum_{i=1}^n l_i \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + \sum_{i=1}^n l_i b_i = 0. \quad (8.9)$$

Мы хотим, чтобы уравнение (8.9) содержало производные только по одному направлению вида (8.7). Иначе говоря, уравнение (8.9) должно иметь вид

$$\sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + \sum_{j=1}^n l_j b_j = 0. \quad (8.10)$$

Приравнивая коэффициенты при производных в уравнениях (8.9) и (8.10), получим уравнения

$$\sum_{i=1}^n l_i A_{ij} = m_j, \quad \sum_{i=1}^n l_i a_{ij} = m_j \dot{x}. \quad (8.11)$$

Исключая из (8.11) величину m_j , получим

$$\sum_{i=1}^n l_i (A_{ij} \dot{x} - a_{ij}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.12)$$

Для разрешимости однородной системы (8.12) относительно l_i ее определитель должен быть равен нулю:

$$|A_{ij} \dot{x} - a_{ij}| = 0. \quad (8.13)$$

Получили уравнение n -й степени относительно $\dot{x}$. Если все корни этого уравнения действительны, то система (8.8) называется *гиперболической*. Эти значения $\dot{x}$ определяют характеристические направления в плоскости (x, t) .

Применим эти результаты к системе (8.1), (8.2), (8.6). Заметим вначале, что уравнение (8.6) (а также уравнение (8.3)) уже имеет характеристическую форму:

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{на характеристиках} \quad \frac{dx}{dt} = v. \quad (8.14)$$

Далее, умножим уравнение (8.1) на a^2 , уравнение (8.2) — на $\pm a\rho$, уравнение (8.6) — на 1 и сложим их. Получим

$$a^2(\rho_t + v\rho_x) + a^2\rho v_x \pm a\rho(v_t + vv_x) \pm ap_x + \\ + p_t + vp_x - a^2(\rho_t + v\rho_x) = 0. \quad (8.15)$$

Здесь нижние индексы указывают дифференцирование по соответствующей переменной.

Простые преобразования дают

$$p_t + (v \pm a)p_x \pm \rho a[v_t + (v \pm a)v_x] = 0. \quad (8.16)$$

Запишем окончательно исходную систему уравнений в характеристической форме:

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{на характеристиках} \quad C_+: \quad \frac{dx}{dt} = v + a; \quad (8.17)$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{на характеристиках} \quad C_-: \quad \frac{dx}{dt} = v - a; \quad (8.18)$$

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{на характеристиках } P: \frac{dx}{dt} = v. \quad (8.19)$$

Отметим, что характеристики исходной квазилинейной системы уравнений нельзя построить до решения задачи в плоскости (x, t) , так как они зависят от искомого решения (p, ρ, v) .

Характеристики P представляют собой траектории материальных частиц континуума. Характеристики C_+ и C_- представляют собой траектории малых возмущений, которые, как вытекает из теории звука в газе, распространяются по газу со скоростью звука a .

Выше характеристические направления были определены как направления, приводящие уравнения в частных производных к квазиобыкновенным уравнениям: каждое уравнение системы содержит производные только по одному из направлений. Отсюда легко вывести другое, весьма распространенное определение характеристических линий: *это линии, на которых нельзя ставить задачу Коши*. Действительно, для получения решения задачи Коши для системы n уравнений в окрестности линии начальных данных необходимо уметь вычислить n выводящих с этой линии производных. Но если линия начальных данных — характеристика, то можно определить лишь $n - 1$ выводящих производных: так как уравнение, содержащее производные вдоль линии начальных данных, использовать нельзя, остается всего $n - 1$ уравнение.

По этой же причине характеристику можно определить как линию, вдоль которой можно «склеивать» решения с разными дифференциальными свойствами. Проще говоря, характеристика может быть линией разрыва первых производных. Действительно, поскольку для определения n выводящих производных мы имеем лишь $n - 1$ уравнений, то одна из производных может быть задана произвольно. Можно задать разные значения этой производной слева и справа от характеристической линии. Тогда в общем случае все производные решения на характеристике будут иметь разрыв.

В зависимости от обстоятельств удобно пользоваться различными определениями характеристических линий.

Последнее из отмеченных здесь определений характеристик позволяет рассматривать их как *линии возможного распространения возмущений*. Действительно, если имеющееся непрерывное и гладкое решение может быть изменено лишь на части области определения, а в другой части остается прежним, то линия раздела нового и прежнего решений обязательно будет характеристикой.

Уравнения газовой динамики, записанные в левой стороне формул (8.17)–(8.19), иногда называют *соотношениями вдоль характеристик* или *условиями совместности*. В действительности эти уравнения отличаются от исходной системы (8.1), (8.2) и (8.6) лишь формой записи, поскольку были получены из нее линейным преобразованием, не содержащим в себе новой информации и не «заслуживают» нового названия.

Инварианты Римана

Уравнение (8.19) означает, что энтропия частицы s во все время движения остается постоянной. Если энтропия всех частиц в начале движения, т. е. при $t = 0$, одинакова, то она будет постоянна во всей области (x, t) , и движение называется *изэнтропическим*. В этом случае уравнение состояния дает универсальную для всего движения связь

$$p = p(\rho). \quad (8.20)$$

Такие движения в литературе иногда называют *баротропными*. В этом случае уравнения (8.17) и (8.18) можно проинтегрировать и записать

$$\int \frac{a(\rho) d\rho}{\rho} + v = \text{const} \quad \text{на } C_+: \quad \frac{dx}{dt} = v + a, \quad (8.21)$$

$$\int \frac{a(\rho) d\rho}{\rho} - v = \text{const} \quad \text{на } C_-: \quad \frac{dx}{dt} = v - a. \quad (8.22)$$

Здесь было использовано равенство

$$\frac{dp}{dt} = a^2 \frac{d\rho}{dt},$$

верное для дифференцирования по любому направлению вследствие универсальности соотношения (8.20).

Формулы (8.21), (8.22) называются *инвариантами Римана*. Разумеется, не всякая характеристическая форма уравнений допускает их запись в виде инвариантных конечных соотношений. Например, в дальнейшем увидим, что в случае релаксирующего газа подобные соотношения не имеют места.

Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями верны формулы

$$p = C \rho^\gamma, \quad a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (8.23)$$

и инварианты Римана принимают вид

$$\frac{2}{\gamma - 1} a \pm v = \text{const} \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = v \pm a. \quad (8.24)$$

Очевидно, формулы (8.21), (8.22) или (8.24) можно трактовать как распространение волны:

комбинация искоемых функций p , ρ , v , равная $2a/(\gamma - 1) + v$, оставаясь постоянной, распространяется по газу со скоростью a в направлении движения газа;

комбинация искоемых функций p , ρ , v , равная $2a/(\gamma - 1) - v$, оставаясь постоянной, распространяется по газу со скоростью a в направлении, противоположном направлению движения газа.

Простая волна

Рассмотрим один частный класс одномерных нестационарных течений, именуемых *простыми волнами*. Для определенности сразу будем рассматривать совершенный газ с постоянными теплоемкостями.

а) *Определение с помощью инвариантов Римана*. Рассмотрим течения газа, для которых один из инвариантов Римана (8.24) остается постоянным во всей области движения. Пусть

$$\frac{2}{\gamma - 1} a - v = \text{const} = \frac{2a_0}{\gamma - 1}. \quad (8.25)$$

Здесь a_0 — скорость звука в той точке, где скорость газа равняется нулю. В этом случае имеем два первых интеграла уравнений движения: соотношения (8.20) и (8.25). Легко себе представить, что в этом случае две из трех искоемых функций можно выразить через третью и свести задачу к нахождению этой третьей функции. Выразим p и v через ρ . Имеем

$$p = C \rho^\gamma, \quad a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1}, \quad (8.26)$$

$$v = \frac{2a}{\gamma - 1} - \frac{2a_0}{\gamma - 1} = \frac{2a_0}{\gamma - 1} \left(\frac{a}{a_0} - 1 \right) = \frac{2a_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} - 1 \right]. \quad (8.27)$$

б) *Кинематическая волна*. Для окончательного решения задачи, т. е. для определения ρ используем уравнение неразрывности, в котором учтем, что v есть функция ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (8.28)$$

Вычислим $d(\rho v)/d\rho$. Можно было бы сразу дифференцировать ρv с v из (8.27), но лучше упростить выкладки. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d(\rho v)}{d\rho} &= v + \rho \frac{dv}{d\rho}, \\ \frac{dv}{d\rho} &= \frac{2}{\gamma - 1} \frac{da}{d\rho} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{d}{d\rho} \sqrt{\gamma C \rho^{\gamma-1}} = \frac{a}{\rho}, \\ \frac{d(\rho v)}{d\rho} &= v + \rho \frac{a}{\rho} = v + a.\end{aligned}\quad (8.29)$$

Уравнение (8.28) перепишем так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v + a) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (8.30)$$

Получили уравнение простой волны. Оно означает, что постоянное значение плотности ρ распространяется со скоростью $v + a$. Иначе говоря,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = v + a \quad (8.31)$$

(сравните с трактовкой инвариантов Римана, приведенной после формул (8.24)).

Поскольку вдоль линий, описываемых уравнением $dx/dt = v + a$, плотность остается постоянной, а правая часть уравнения этих линий зависит только от ρ ($v + a = c(\rho)$), то указанные линии — прямые, описываемые уравнением

$$x = c(\rho) t + F(\rho), \quad (8.32)$$

где $F(\rho)$ — произвольная функция плотности. Формулу (8.32) следует рассматривать как искомое решение $\rho = \rho(x, t)$ уравнения (8.30), а произвольную функцию $F(\rho)$ находить из начальных и граничных условий.

Разумеется, решение (8.32) можно найти с использованием только инвариантов Римана, поскольку они являются полным эквивалентом исходных уравнений. В самом деле, имеем

$$\frac{2}{\gamma - 1} a + v = \text{const} \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = v + a, \quad (8.33)$$

а не всюду, как второй инвариант (8.25). Поскольку для всей области и, в частности, вдоль линий $dx/dt = v + a$ справедливо соотношение

$$\frac{2}{\gamma - 1} a - v = \frac{2}{\gamma - 1} a_0,$$

то немедленно получаем (складывая и вычитая инварианты Римана на $dx/dt = v + a$)

$$v = \text{const} \quad \text{и} \quad a = \text{const} \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = v + a. \quad (8.34)$$

Иначе говоря, вновь получаем, что характеристики C_+ в рассматриваемой простой волне — прямые линии. Конкретные значения констант в (8.34), которые изменяются от одной характеристики к другой, получаются из граничных и начальных условий.

Если общий случай — это волны некоторых комбинаций искомым функций (инварианты Римана), то простая волна — это волна самих искомым функций v , p , ρ .

Здесь рассмотрена простая волна, бегущая в одном направлении с движением газа. Разумеется, можно рассмотреть и простую волну, движущуюся в противоположном направлении, нужно только считать константой вместо (8.25) другой инвариант Римана.

Лекция 9

ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ТИПА ПРОСТОЙ ВОЛНЫ К АНАЛИЗУ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

Задача о поршне, выдвигающемся из трубы, заполненной газом. Центрированная волна разрежения. Максимальная скорость газа при нестационарном истечении. Течение в области, граничащей с областью постоянного течения (или покоя) описывается решением типа простой волны. Опрокидывание простой волны сжатия. Характеристики уравнений одномерных нестационарных течений релаксирующего газа. Предельный переход к равновесному течению.

Дадим некоторые приложения решений типа простой волны. Рассматриваются волны разрежения. Показано, что в самом решении типа простой волны заложена возможность ее опрокидывания, т. е. образования течения с разрывами.

Задача о поршне, выдвигающемся из трубы, заполненной газом

Решим эту задачу методом характеристик. Иначе говоря, будем пользоваться характеристическими переменными, в которых основные уравнения имеют вид инвариантов Римана. Рассматриваем случай совершенного газа, для которого формулы имеют простой вид.

Задача ставится следующим образом. Пусть имеем бесконечную трубу, в которую помещен поршень. Справа от поршня труба заполнена газом.

В качестве искомых функций для удобства записи решения возьмем скорость v , скорость звука a и энтропию s . Очевидно, a и s взаимно однозначно связаны с давлением p и плотностью ρ через уравнение состояния. Рассматривается нестационарное непрерывное адиабатическое течение невязкого совершенного газа с плоскими волнами произвольной амплитуды. Такое течение описывается уравнениями (8.1)–(8.4).

Пусть в момент времени $t = 0$ поршень, находящийся в точке $x = 0$, начинает двигаться по закону

$$x = X(t). \quad (9.1)$$

Начальные условия имеют вид

$$v = 0, \quad a = a_0, \quad s = s_0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (9.2)$$

т. е. газ покоится.

Граничное условие

$$v = \dot{X}(t) \quad \text{при} \quad x = X(t) \quad (9.3)$$

показывает, что газ, прилегающий к поршню, повторяет движение поршня.

Изобразим область течения на диаграмме (x, t) (рис. 9.1). Ось Ox соответствует начальному состоянию газа. Поскольку поршень выдвигается из газа, его траектория располагается

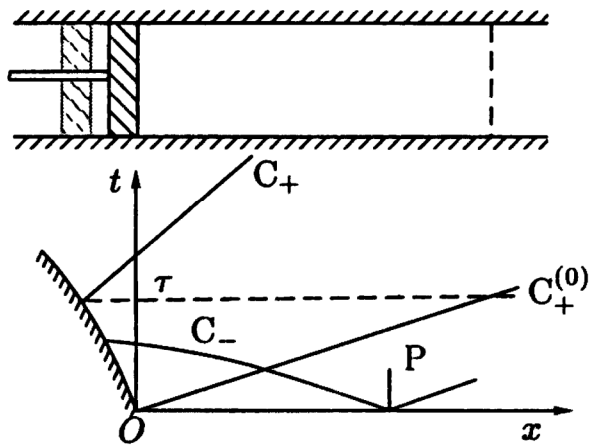


Рис. 9.1. Волна разрежения при выдвигании поршня из трубы, заполненной газом

при отрицательных x . По условию (9.3) траектория поршня служит одновременно траекторией частицы газа.

Траектории всех частиц P начинаются из состояния покоя, т. е. на прямой Ox . Поскольку начальная энтропия всех частиц одинакова и в течение энтропия каждой частицы сохраняется, то течение изэнтропическое. Можно воспользоваться инвариантами Римана.

Рассмотрим расположение характеристик C_- и C_+ .

Легко видеть, что C_- идут из линии покоя Ox в сторону траектории поршня ($dx/dt = -a < 0$), а C_+ — в противоположном направлении. Поскольку на C_- величина dx/dt меньше, чем на траектории P ($v - a < v$ при $a > 0$), то все C_- начинаются на оси Ox в невозмущенной области и идут влево. Иначе говоря, инвариант Римана со знаком минус, остающийся постоянным на каждой C_- , будет абсолютной константой

$$\frac{2a}{\gamma - 1} - v = \frac{2a_0}{\gamma - 1}, \quad (9.4)$$

т. е. имеем течение типа простой волны.

Рассмотрим характеристики C_+ , начинающиеся на оси Ox . Для них константа также равна $2a_0/(\gamma - 1)$, т. е.

$$\frac{2a}{\gamma - 1} + v = \frac{2a_0}{\gamma - 1}. \quad (9.5)$$

Из (9.4) и (9.5) получаем, что для этих характеристик $v = 0$, $a = a_0$, т. е. они являются прямыми линиями $x - x_0 = a_0 t$. Последняя такая характеристика выходит из начала координат. На рисунке она обозначена $C_+^{(0)}$: $x = a_0 t$. Выше этой характеристики начинается область переменного течения.

Для характеристик C_+ , начинающихся на поршне, имеем

$$\frac{2a}{\gamma - 1} + v = \text{const} \quad \text{на} \quad C_+: \quad \frac{dx}{dt} = v + a. \quad (9.6)$$

Вычитая (9.4) из (9.6), как и ранее, получим

$$v = \text{const} \quad \text{на} \quad C_+: \quad \frac{dx}{dt} = v + a_0 + \frac{\gamma - 1}{2} v = a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v. \quad (9.7)$$

Последнее равенство получено с использованием (9.4). Очевидно, искомая константа в (9.7) определяется законом движения поршня. Как уже отмечалось ранее для произвольной простой волны, в данной задаче характеристики C_+ — прямые линии с угловым коэффициентом

$$a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v.$$

На характеристике C_+ , пересекающей с траекторией поршня в момент времени $t = \tau$, скорость газа равна

$$v = \dot{X}(\tau) \quad (9.8)$$

и сохраняет постоянное значение. Уравнение характеристики C_+ имеет вид

$$x = X(\tau) + \left[a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} \dot{X}(\tau) \right] (t - \tau) \quad (9.9)$$

(прямая с угловым коэффициентом $a_0 + ((\gamma + 1)/2) \dot{X}(\tau)$, проходящая через точку $x = X(\tau)$, $t = \tau$). Искомые функции запишутся так:

$$v = \dot{X}(\tau), \quad a = a_0 + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{X}(\tau), \quad s = s_0. \quad (9.10)$$

Формулы (9.9), (9.10) дают параметрическую зависимость v , a , s от x , t через параметр τ . Как уже отмечалось, p и ρ легко выразить через a и s :

$$\rho = \left(\frac{a^2}{\gamma C} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad p = C \left(\frac{a^2}{\gamma C} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

В верхней части рис. 9.1 показана труба, заполненная газом с правой стороны от помещенного в ней поршня. Штрихами сле-

ва показано положение поршня при $t = \tau$, а штриховой прямой справа показано положение переднего фронта волны разрежения $x = a_0 \tau$.

Если движение поршня замедляется, то характеристики могут пересекаться; это приводит к образованию разрывов.

Центрированная волна разрежения

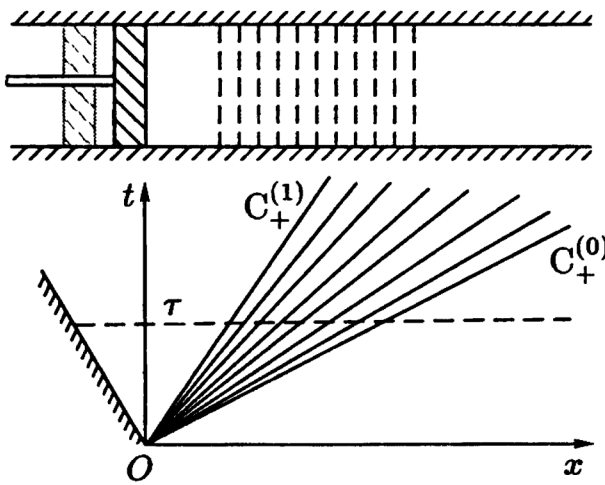
Рассмотрим частный случай разобранный выше задачи, когда поршень выдвигается с постоянной скоростью $-V$ (рис. 9.2). Тогда решение (9.10) описывает однородное течение

$$v = -V, \quad a = a_0 - \frac{\gamma - 1}{2} V, \quad (9.11)$$

примыкающее к поршню. Характеристики C_+ описываются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = a_0 - \frac{\gamma + 1}{2} V, \quad x = -V \tau + \left(a_0 - \frac{\gamma + 1}{2} V \right) (t - \tau), \quad (9.12)$$

т.е. имеют одинаковый наклон. Характеристика $C_+^{(1)}$ этого семейства, выходящая из начала координат, описывается уравнением (9.12) при $\tau = 0$. Таким образом, имеется переходная область, заключенная между характеристиками $C_+^{(0)}$ и $C_+^{(1)}$. Все характеристики C_+ этой области начинаются в точке $x = t = 0$ и описываются уравнением



уравнением

$$x = \left(a_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) t, \quad (9.13)$$

$$-V \leq v \leq 0.$$

Рис. 9.2. Центрированная волна разрежения

Из (9.13) получаем решение для этой переходной области

$$v = \frac{2a_0}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{a_0 t} - 1 \right), \quad a = a_0 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{a_0 t} + \frac{2}{\gamma + 1} \right)$$

при $1 - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{V}{a_0} < \frac{x}{a_0 t} < 1. \quad (9.14)$

Формулы (9.11), (9.14) дают полное решение задачи, в котором искомые функции непрерывны, а некоторые их первые производные терпят разрыв на линиях $C_+^{(0)}$ и $C_+^{(1)}$. Полезно отметить, что в данной задаче решение всюду зависит только от отношения $x/(a_0 t)$.

В верхней части рис. 9.2 показана труба, заполненная газом с правой стороны от помещенного в ней поршня. Штрихами слева показано положение поршня при $t = \tau$, а заштрихованная область справа означает центрированную волну разрежения с передним фронтом при $x = a_0 \tau$ и задним фронтом при

$$x = \left(a_0 - \frac{\gamma + 1}{2} V \right) \tau, \quad V > 0.$$

Максимальная скорость истечения из трубы или вытягивания газа поршнем получается при $a = 0$. Из (9.11) имеем

$$V_{\max} = \frac{2a_0}{\gamma - 1}. \quad (9.15)$$

При этом из формул для p и ρ (см. предыдущий пункт) получается $p = 0$, $\rho = 0$, т. е. происходит нестационарное истечение в вакуум.

Течение в области, граничащей с областью постоянного течения (или покоя), — простая волна

Легко убедиться, что вынесенное в заголовок утверждение имеет общий характер. Из свойств характеристик вытекает, что границей областей постоянного Ω_0 и переменного Ω_1 течений непременно должна быть характеристика. Пусть это характеристика $C_+^{(0)}$. Тогда характеристики C_+ не переходят из Ω_0 в Ω_1 , а характеристики C_- переходят. Так как все параметры течения на границе Ω_0 и Ω_1 постоянны, то константа в инварианте Римана на характеристиках C_- одинакова во всей области Ω_1 . Поэтому течение в области Ω_1 описывается *простой волной*.

Опрокидывание простой волны сжатия

Рассмотрим внимательно профиль плотности в простой волне сжатия. Он описывается формулой (8.32) и для некоторого момента времени t изображен на рис. 9.3, а. Пусть волна движется вправо со скоростью $v + a$. Участок волны слева от точки M будет волной разрежения, так как в нем плотность захватываемых волной частиц газа понижается, а участок справа от точки M — волной сжатия, так как в нем

плотность захватываемых волной частиц газа повышается. Из формул (8.26), (8.27) видно, что скорость волны не одинакова в различных ее точках; скорость волны $v + a$ тем больше, чем больше плотность ρ , так как и v , и a увеличиваются с увеличением плотности. Иначе говоря, точка N_2 догоняет точку N_1 , а точка N'_2 отстает от точки N'_1 . По истечении некоторого времени профиль волны примет вид, показанный на рис. 9.3, б: профиль участка сжатия стал более крутым, а участка разрежения — более пологим. В принципе может

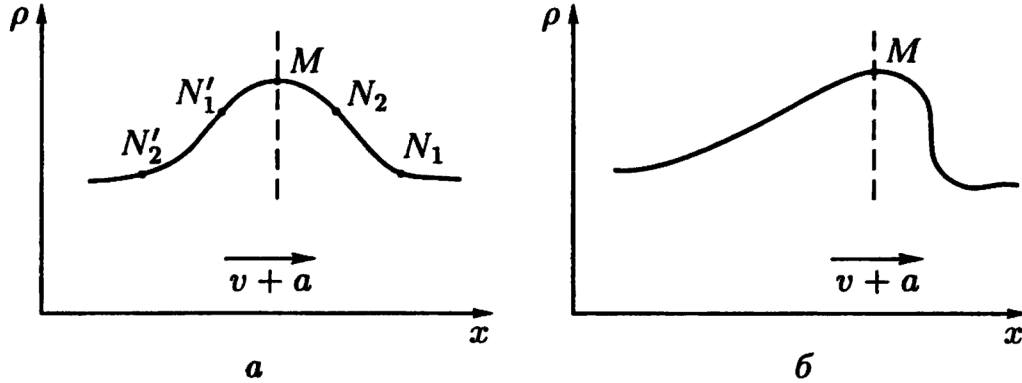


Рис. 9.3. Опрокидывание простой волны сжатия

возникнуть такая ситуация, когда профиль плотности на участке сжатия станет неоднозначным. Эта ситуация физически бессмысленна. В этом случае говорят об опрокидывании волны и вводят скачки уплотнения.

Характеристики уравнений одномерных нестационарных течений релаксирующего газа

Применим общую теорию характеристик к течению релаксирующего газа. Для удобства в качестве модели газа выберем совершенный двухатомный газ с релаксацией колебательной энергии. Система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (9.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - a_f^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho(\gamma - 1) \left(\frac{\partial e_v}{\partial t} + v \frac{\partial e_v}{\partial x} \right) = 0, \quad (9.18)$$

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} + v \frac{\partial e_v}{\partial x} = \frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau_0} = \omega_v, \quad p = \rho RT. \quad (9.19)$$

Здесь $e_v(x)$ — известная функция. Уравнение (9.18) получается из общего уравнения притока тепла подстановкой выражения для внутренней энергии газа.

Уравнения (9.18) и (9.19) уже имеют характеристический вид, так как содержат производные только вдоль траекторий частиц P : $\dot{x} = v$. Для определения других семейств характеристик исключим из (9.18) производную de_v/dt вдоль P :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} - a_f^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho(\gamma - 1)\omega_v = 0. \quad (9.20)$$

Применим обычную процедуру к уравнениям (9.16), (9.17) и (9.20): умножим (9.16) на a_f^2 , (9.17) на $\pm \rho a_f$, (9.20) на 1 и сложим. Приводя подобные члены, получим

$$p_t + (v \pm a_f)p_x \pm [v_t + (v \pm a_f)v_x] + \rho(\gamma - 1)\omega_v = 0. \quad (9.21)$$

Уравнение (9.21) показывает, что полная система характеристик уравнений (9.16)–(9.19) выглядит так:

$$C_{\pm}: \frac{dx}{dt} = v \pm a_f, \quad P: \frac{dx}{dt} = v. \quad (9.22)$$

Иначе говоря, характеристики уравнений одномерных нестационарных течений релаксирующего газа определяются замороженной скоростью звука.

Предельный переход к равновесному течению

В пределе $\tau_0 \rightarrow 0$ система уравнений (9.16)–(9.19) описывает предельное равновесное течение, в котором $T = T_v$. Естественно поставить вопрос о характеристиках системы уравнений этого предельного течения. Поскольку время релаксации τ_0 не входит в выражение для замороженной скорости звука a_f , то кажется, что характеристики (9.22) относятся и к предельному равновесному течению. В действительности это не так.

Чтобы показать это, проведем несложные тождественные преобразования уравнения (9.18). Заменяя частные производные полными производными вдоль P , запишем

$$\frac{dp}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} + \rho(\gamma - 1) \left[\frac{de_v(T_v)}{dt} + \frac{de_v(T)}{dt} - \frac{de_v(T)}{dt} \right] = 0. \quad (9.23)$$

С учетом уравнения Клапейрона производная $de_v(T)/dt$ принимает вид

$$\frac{de_v(T)}{dt} = \dot{e}_v \frac{dT}{dt} = \frac{\dot{e}_v}{R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right). \quad (9.24)$$

Подставляя (9.24) вместо второго слагаемого в квадратных скобках в (9.23), получим

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} + \rho(\gamma - 1) \frac{\dot{e}_v}{R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) + \\ + \rho(\gamma - 1) \frac{d}{dt} [e_v(T_v) - e_v(T)] = 0. \end{aligned} \quad (9.25)$$

После приведения подобных членов и деления на коэффициент при dp/dt получим

$$\frac{dp}{dt} - \frac{\gamma + \frac{\gamma-1}{R} \dot{e}_v}{1 + \frac{\gamma-1}{R} \dot{e}_v} \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho(\gamma-1)}{1 + \frac{\gamma-1}{R} \dot{e}_v} \frac{d}{dt} [e_v(T_v) - e_v(T)] = 0. \quad (9.26)$$

Упростим коэффициенты, используя выражения $\gamma = c_p/c_v$ и формулу Майера $R = c_p - c_v$:

$$\frac{\gamma + \frac{\gamma-1}{R} \dot{e}_v}{1 + \frac{\gamma-1}{R} \dot{e}_v} = \frac{c_p + \dot{e}_v}{c_v + \dot{e}_v} = \gamma_e, \quad (9.27)$$

$$\frac{\rho(\gamma-1)}{1 + \frac{\gamma-1}{R} \dot{e}_v} = \frac{\rho R(c_p - c_v)}{c_v(c_p - c_v) + \dot{e}_v(c_p - c_v)} = \frac{\rho R}{c_v + \dot{e}_v} = \frac{\rho R}{c_{ve}}. \quad (9.28)$$

Напомним, что $\dot{e}_v = de_v(T)/dT$ — теплоемкость инертных степеней свободы в состоянии полного термодинамического равновесия. Окончательно тождественные преобразования (9.23)–(9.28) приводят уравнение (9.18) к следующему виду:

$$\frac{dp}{dt} - a_e^2 \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho R}{c_{ve}} \frac{d}{dt} [e_v(T_v) - e_v(T)] = 0. \quad (9.29)$$

Теперь видно, что предельный переход $\tau_0 \rightarrow 0$ приводит уравнения (9.29) и (9.19) к следующим уравнениям:

$$\frac{dp}{dt} - a_e^2 \frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (9.30)$$

$$e_v(T_v) = e_v(T), \quad T_v = T, \quad (9.31)$$

а уравнения (9.16) и (9.17) не изменяются. Применяя описанный выше способ вывода характеристик к равновесной системе (9.16), (9.17), (9.30), (9.31), получим

$$C_{\pm}: \frac{dx}{dt} = v \pm a_e, \quad P: \frac{dx}{dt} = v. \quad (9.32)$$

Таким образом, при переходе к равновесию ($\tau_0 \rightarrow 0$) характеристики $C_{\pm}$ скачкообразно изменяются от (9.22) к (9.32), так как a_f и a_e различаются на конечную величину.

Ранее отмечалось, что характеристики могут играть роль линий распространения возмущений. Как реализуется деформация малых возмущений при переходе к равновесию, мы видели при изучении теории звука в релаксирующем газе. Как деформируются конечные возмущения в пределе $\tau_0 \rightarrow 0$, мы увидим на конкретном примере решения простой задачи стационарного течения релаксирующего газа. Подобную деформацию для одномерных нестационарных течений можно проследить, если рассмотреть задачу о выдвигании поршня из трубы, заполненной релаксирующим газом.

Лекция 10

ТЕОРИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Соотношения на сильном разрыве. Контактный разрыв. Ударная волна. Адиабата Гюгонио. Слабые ударные волны. Сильные ударные волны. Ударные волны в совершенном газе с постоянными теплоемкостями. Примеры ударных волн с изменением уравнения состояния.

Опрокидывание простой волны — один из простейших примеров возникновения сильных разрывов при движении сжимаемого газа. Это явление носит общий характер. Более того, при движении газа около препятствий либо ограничивающих стенок можно получить непрерывные поля параметров лишь в результате точного расчета и тщательного проектирования потока.

Соотношения на сильном разрыве

Для изучения свойств разрывов будем исходить из общих законов сохранения массы, импульса, энергии, записанных в интегральной форме. Используем также закон возрастания энтропии. Здесь для простоты рассмотрим случай одномерного движения. В качестве контрольного объема взят цилиндр с осью Ox и основаниями единичной площади при

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad x_1 < x_2.$$

Для однородной среды уравнения баланса принимают следующий вид.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx + (\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1} = 0. \quad (10.1)$$

Уравнение импульса:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho v \, dx + (\rho v^2 + p_{xx})_{x_2} - (\rho v^2 + p_{xx})_{x_1} = 0. \quad (10.2)$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dx + \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + p_{xx} v + q \right]_{x_2} - \\ - \left[\rho v \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + p_{xx} v + q \right]_{x_1} = 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Уравнения (10.1)–(10.3) можно записать в следующем общем виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} A dx + B|_{x_2} - B|_{x_1} = 0, \quad (10.4)$$

$$A \left\{ \rho, \rho v, \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \right\}, \quad (10.5)$$

$$B \left\{ \rho v, \rho v^2 + p_{xx}, \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + p_{xx} v + q \right\}. \quad (10.6)$$

Пусть на интервале (x_1, x_2) имеется разрыв переменных, движущийся относительно газа. Это движение описывается уравнением $x = x_0(t)$. Газ вне разрыва считается невязким и нетеплопроводным, т. е. $p_{xx} = p$, $q = 0$. В дальнейшем нам понадобится представление о роли вязкости и теплопроводности внутри разрыва для описания источника энтропии. Там будем учитывать, что $p_{xx} - p$ и q пропорциональны соответствующим производным (см. лекцию 3). Это вполне соответствует представлению о разрыве как об области резкого изменения параметров, т. е. об области больших производных. Вне разрыва параметры изменяются плавно, так что величинами $p_{xx} - p$ и q можно пренебречь.

Запишем подробнее уравнение (10.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{x_0(t)} A(t, x) dx + \int_{x_0(t)}^{x_2} A(t, x) dx \right] + B|_{x_2} - B|_{x_1} = \\ = A[x_0^-(t), t] \dot{x}_0 - A[x_0^+(t), t] \dot{x}_0 + \\ + \int_{x_1}^{x_0} \frac{\partial A}{\partial t} dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{\partial A}{\partial t} dx + B|_{x_2} - B|_{x_1} = 0. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Определим предел уравнения (10.7) при

$$x_1 \rightarrow x_0^-, \quad x_2 \rightarrow x_0^+.$$

Получим

$$-\dot{x}_0 [A] + [B] = 0. \quad (10.8)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок соответствующей комбинации параметров на разрыве.

Обозначим $\dot{x}_0 = D$ и подставим в (10.8) компоненты A и B :

$$[\rho(v - D)] = 0, \quad (10.9)$$

$$[\rho v(v - D) + p] = 0, \quad (10.10)$$

$$\left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (v - D) + pv \right] = 0. \quad (10.11)$$

Если поток газа через разрыв отсутствует, то для скорости имеем $v_1 = v_2 = D$. Тогда условия (10.9)–(10.11) сводятся к одному условию $[p] = 0$, выражающему равенство давлений по обе стороны разрыва. Имеем случай *контактного разрыва*.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение изменения энтропии

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho s dx + \rho v s \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{q}{T} \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\sigma_{xx}}{T} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{q}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx. \quad (10.12)$$

Переносим третье слагаемое из левой части в правую, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho s dx + \rho v s \Big|_{x_2} - \rho v s \Big|_{x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\sigma_{xx}}{T} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{T} \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx. \quad (10.13)$$

Из (10.13) видно, что условие сохранения энтропии на ударной волне не выполняется. В самом деле, если бы правая часть (10.13) обращалась в нуль, то после преобразования (10.7) и предельного перехода получилось бы соотношение

$$[\rho s(v - D)] = 0,$$

откуда в силу (10.9) следовало бы $[s] = 0$. Однако правая часть (10.13) из-за наличия производных в подынтегральном выражении не обращается в нуль в предельном переходе $x_1 \rightarrow x_0^-$, $x_2 \rightarrow x_0^+$. Правая часть (10.13) представляет собой источник энтропии в газе при переходе через сильный разрыв.

Стационарный прямой скачок уплотнения

Перейдем к системе координат, в которой разрыв покоится. Для этого введем относительную скорость $u = v - D$ и подставим ее в формулы (10.9)–(10.11). После приведения подобных членов получим

$$[\rho u] = 0, \quad [p + \rho u^2] = 0, \quad \left[\rho u \left(h + \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (10.14)$$

Здесь $h = e + p/\rho$ — энтальпия газа. Обозначая индексом 1 параметры перед ударной волной, а индексом 2 параметры за ней, запишем условия на стационарной прямой ударной волне в следующем виде:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (10.15)$$

Далее будем рассматривать двупараметрические среды, для которых $h = h(p, \rho)$.

Ниже изучаются некоторые свойства прямых ударных волн, определяемых уравнениями (10.15).

Адиабата Гюгонио

Обозначим через $j = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ удельный поток массы газа, т. е. количество газа, переносимое через единицу площади в единицу времени. Введем также обозначения удельных объемов

$$V_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad V_2 = \frac{1}{\rho_2}$$

до и после ударной волны.

Тогда из второго уравнения (10.15) следует

$$p_1 - p_2 = \rho_2^2 u_2^2 V_2 - \rho_1^2 u_1^2 V_1, \quad j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \quad (10.16)$$

Отсюда легко получить, что на ударной волне выполняются неравенства

$$p_2 > p_1 \text{ и } V_1 > V_2 \quad (\text{скачки сжатия})$$

либо

$$p_1 > p_2 \text{ и } V_2 > V_1 \quad (\text{скачки разрежения}).$$

Полезно выписать формулу для разности скоростей $u_1 = jV_1$, $u_2 = jV_2$:

$$u_1 - u_2 = j(V_1 - V_2) = \pm \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \quad (10.17)$$

Наконец, исключим скорость из третьего уравнения (10.15). После простых преобразований получим

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(V_1 + V_2) = 0. \quad (10.18)$$

Эта формула выражает зависимость, называемую *адиабатой Гюгонио*.

Для двухпараметрических сред $h = h(p, V)$, и формула (10.18) содержит только независимые термодинамические переменные p, V . С использованием внутренней энергии формула адиабаты Гюгонио запишется так:

$$e_1 - e_2 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_1 - V_2) = 0. \quad (10.19)$$

Если зафиксировать условия перед ударной волной, т.е. переменные с индексом 1, то формулу (10.18) можно рассматривать как неявную функцию, связывающую переменные p, V .

Рассмотрим некоторые свойства этой функции.

1. Если уравнение состояния газа не изменяется при переходе через ударную волну, т.е. функции $h_1(p, V)$ и $h_2(p, V)$ одинаковы, то адиабата Гюгонио проходит через точку (p_1, V_1) . Это вытекает непосредственно из формулы (10.18).

2. Кривая (10.18) пересекает прямую $V = V_1$ только один раз. Допустим, что это не так. Тогда кривая (10.18) проходит через точку (p_2, V_1) , где $p_2 \neq p_1$. Это невозможно, так как из (10.19) и $V_2 = V_1$ вытекает, что

$$e_2(p_2, V_1) = e_1(p_2, V_1),$$

т.е. $p_2 = p_1$. Аналогично, кривая (10.18) пересекает прямую $p = p_1$ только один раз.

3. Вторая формула (10.16), взятая с обратным знаком, дает тангенс угла наклона хорды, соединяющей точки (p_1, V_1) и (p_2, V_2) с положительным направлением оси абсцисс. Имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = -j^2. \quad (10.20)$$

Из (10.13) следует, что энтропия на ударной волне не сохраняется, хотя движение газа вне разрыва адиабатическое. Частицу газа можно рассматривать как термодинамически изолированную систему, в которой при переходе через ударную волну

происходит необратимая диссипация энергии, сопровождающаяся ростом энтропии. Интенсивность источника энтропии описывается правой частью уравнения (10.13).

Слабые ударные волны

Рассмотрим свойства ударной адиабаты в окрестности точки (p_1, V_1) . Это позволит сделать окончательные выводы о направлении изменения величин в ударной волне произвольной интенсивности.

В качестве независимых термодинамических переменных выберем s и p (все рассуждения здесь проводятся для произвольного двухпараметрического газа). Разложим функции $h(s, p)$ и $V(s, p)$ в степенные ряды относительно точки (p_1, V_1) :

$$h_2 = h_1 + \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_p (s_2 - s_1) + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right|_s (p_2 - p_1)^2 + \\ + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 h}{\partial p^3} \right|_s (p_2 - p_1)^3 + \dots, \quad (10.21)$$

$$V_2 = V_1 + \left. \frac{\partial V}{\partial s} \right|_p (s_2 - s_1) + \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_s (p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_s (p_2 - p_1)^2 + \dots \quad (10.22)$$

В степенных рядах выписаны лишь члены, необходимые для дальнейших вычислений, остальные слагаемые подразумеваются.

Из термодинамического тождества в виде

$$T ds = dh - V dp, \quad dh = T ds + V dp$$

заключаем, что

$$T = \left. \frac{\partial h}{\partial s} \right|_p, \quad V = \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_s, \quad \left. \frac{\partial^3 h}{\partial p^3} \right|_s = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_s. \quad (10.23)$$

Подставим (10.21)–(10.23) в уравнение адиабаты Гюгонио и приведем подобные члены. Простые выкладки приводят к соотношению

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_s (p_2 - p_1)^3, \quad (10.24)$$

выражающему адиабату Гюгонио в малой окрестности точки (p_1, V_1) . Здесь членом

$$\left. \frac{\partial V}{\partial s} \right|_p (s_2 - s_1) (p_2 - p_1)$$

пренебрегается как малой величиной в сравнении с $s_2 - s_1$. Соотношение (10.24) выражает тот важный факт, что скачок энтропии в ударной волне малой интенсивности является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Для реальных сред из опытных данных следует, что

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right|_s > 0. \quad (10.25)$$

Иначе говоря, ударная адиабата в окрестности точки (p_1, V_1) обращена вогнутостью вверх. Отсюда и из (10.24) сразу следует, что поскольку в реально существующих необратимых процессах энтропия может только увеличиваться, реальный смысл имеет только левая часть адиабаты Гюгонио, расположенная выше точки (p_1, V_1) , так как из $s_2 > s_1$ вытекает $p_2 > p_1$ в окрестности точки (p_1, V_1) .

Итак, *существуют только скачки уплотнения.*

Рассмотрим взаимное расположение адиабат Гюгонио и Пуассона в окрестности точки (p_1, V_1) . Уравнение адиабаты Пуассона в переменных s и p имеет вид

$$s_2 - s_1 = 0. \quad (10.26)$$

Видно, что кривые (10.24) и (10.26) имеют в точке (p_1, V_1) касание второго порядка, т. е. имеют одинаковые первые и вторые производные. Пусть $p_2 > p_1$. Тогда на адиабате Гюгонио имеем $s_2 > s_1$. Из термодинамического тождества Гиббса получим формулу

$$\left. \frac{\partial V}{\partial s} \right|_p = \frac{T}{c_p} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p. \quad (10.27)$$

Действительно, запишем

$$V = V(s, p) = V[s(p, T), p] = V(p, T).$$

Из тождества Гиббса

$$T ds = dh - V dp = c_p dT - V dp$$

следует, что

$$\left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p = \frac{c_p}{T}.$$

Тогда получим

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial V}{\partial s} \right|_p \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p,$$

откуда следует (10.27). Для всех тел, расширяющихся при нагревании ($\partial V / \partial T|_p > 0$), имеем, что энтропия растет с увеличением объема при постоянном давлении, поскольку из (10.27) следует $\partial V / \partial s|_p > 0$. Следовательно, абсцисса кривой (10.24) в переменных V, p расположится правее абсциссы кривой (10.26) при $p = p_2$. Аналогично легко показать, что при $p_2 < p_1$ расположение кривых будет противоположным.

Адиабаты (10.24) и (10.26) изображены на рис. 10.1. Из-за условия (10.25) кривые Р и Н обращены вогнутостью вверх.

Рассмотрим величину скорости газа для слабых ударных волн. Формулу (10.20) для потока массы перепишем для окрестности точки (p_1, V_1) . В пределе ($p_2 \rightarrow p_1, V_2 \rightarrow V_1$) получим

$$j^2 = -\operatorname{tg} \beta = - \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_s, \quad (10.28)$$

где β — угол наклона касательной, так как в этом пределе на гладкой кривой хорда переходит в касательную. Производная берется при $s = \text{const}$, так как в этой точке касательные к адиабатам Гюгонио и Пуассона совпадают. В том же приближении

$$u_1 = u_2 = jV = \sqrt{j^2 V^2} = \sqrt{-V^2 \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_s} = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s} = a, \quad (10.29)$$

т. е. ударная волна слабой интенсивности распространяется по газу со скоростью звука.

Получим неравенства для скоростей u_1 и u_2 в окрестности точки (p_1, V_1) . Положение касательной определяется формулой (10.28). Поскольку адиабата Гюгонио обращена вогнутостью вверх, хорда в точке (p_1, V_1) наклонена круче касательной, т. е.

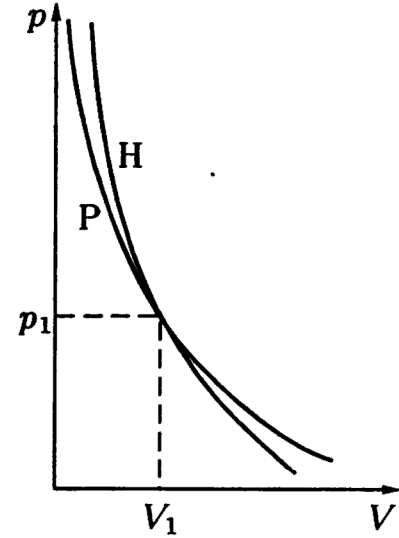


Рис. 10.1. Адиабата Гюгонио (Н) и адиабата Пуассона (Р)

в силу (10.20) имеем

$$j^2 > - \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_s \quad \text{в точке} \quad (p_1, V_1). \quad (10.30)$$

Умножим (10.30) на V_1^2 и получим

$$j^2 V_1^2 = u_1^2 > -V^2 \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{s,1} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s,1} = a_1^2, \quad (10.31)$$

т. е. скорость газа перед ударной волной больше местной скорости звука: $u_1 > a_1$.

Аналогично, построив касательную в точке (p_2, V_2) и замечая, что она расположена круче хорды, получим $u_2 < a_2$.

Таким образом, в том диапазоне интенсивностей ударной волны, где справедливо указанное на рис. 10.1 поведение адиабаты Гюгонио, оказывается, что до ударной волны скорость газа больше местной скорости звука, а после ударной волны скорость газа меньше местной скорости звука.

Кратко: из неравенства $s_2 > s_1$ вытекают неравенства

$$p_2 > p_1, \quad u_1 > a_1, \quad u_2 < a_2.$$

Легко установить также следующее:

так как $p_2 > p_1$, то $V_1 > V_2$ (см. (10.16)),

$$\text{а поскольку } \frac{u_1}{V_1} = \frac{u_2}{V_2} = j, \text{ то } u_1 > u_2.$$

Сильные ударные волны

Рассмотрим предельный вид соотношений на прямом скачке (10.15) в случае, когда скорость газа перед ударной волной очень велика, т. е. много больше местной скорости звука (гиперзвуковое приближение). Из физических соображений понятно, что в этом случае скоростной напор единицы объема газа существенно превосходит давление, а кинетическая энергия единицы массы газа значительно больше ее теплосодержания. Поэтому соотношения на скачке принимают вид

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (10.32)$$

Соотношения имеют такой же вид, как если бы газ перед ударной волной имел температуру и давление, равные нулю, при конечной плотности.

Ударные волны в совершенном газе с постоянными теплоемкостями

Явные формулы для параметров за ударной волной. В совершенном газе имеет место зависимость

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho},$$

и соотношения на прямом скачке (10.15) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \quad p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Выразим параметры за скачком (u_2, ρ_2, p_2) через параметры перед скачком (u_1, ρ_1, p_1) с помощью уравнений (10.33). Обозначим $x = \rho_1/\rho_2 = u_2/u_1$. Из второго уравнения (10.33) имеем

$$\frac{p_2}{\rho_1 u_1^2} = \frac{p_1}{\rho_1 u_1^2} + 1 - \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 u_1^2} = \frac{1}{\gamma M^2} + 1 - x. \quad (10.34)$$

Последнее уравнение (10.33) после умножения на $(\gamma - 1)/(\gamma u_1^2)$ дает

$$\frac{p_2}{\rho_2 u_1^2} = \frac{p_2}{\rho_1 u_1^2} x = \frac{p_1}{\rho_1 u_1^2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(1 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\right) = \frac{1}{\gamma M^2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 - x^2). \quad (10.35)$$

Домножая (10.34) на x и приравнивая результат (10.35), получим уравнение для нахождения x :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\gamma M^2} + (1 - x)x &= \frac{1}{\gamma M^2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 - x^2), \\ \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (1 - x^2) + \frac{1 - x}{\gamma M^2} - x(1 - x) &= 0, \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M^2}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Первый корень $x_1 = 1$ соответствует ударной волне нулевой интенсивности, которой, очевидно, удовлетворяют соотношения (10.33). Второй корень дает изменение плотности на ударной волне

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2}. \quad (10.37)$$

Отношение давлений получим из (10.34):

$$\frac{p_2}{p_1} = \gamma M^2 \left(\frac{1}{\gamma M^2} + 1 - x \right) = \frac{2\gamma M^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (10.38)$$

Из двух последних формул получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{[2\gamma M^2 - (\gamma - 1)] [(\gamma - 1)M^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M^2}. \quad (10.39)$$

Наконец, определим изменение энтропии газа:

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right]. \quad (10.40)$$

В (10.40) нужно подставить (10.37) и (10.38). Для дальнейшего удобно выразить $s_2 - s_1$ через $z = p_2/p_1 - 1$. Из (10.38) получим

$$M^2 = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M^2}{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M^2 + \frac{1}{\gamma + 1}} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z}{1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z}. \quad (10.41)$$

Подставив (10.38) и (10.41) в (10.40), получим

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \frac{(1 + z) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z \right)^\gamma}{\left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z \right)^\gamma}. \quad (10.42)$$

Адиабата Гюгонио. Выражение для адиабаты Гюгонио легко получить из общей формулы (10.18). Кроме того, это выражение уже содержится в (10.41). Обозначим $y = p_2/p_1$ ($z = y - 1$) и получим

$$x = \frac{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)y}{(\gamma - 1) + (\gamma + 1)y} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} y \right) \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + y \right)^{-1}. \quad (10.43)$$

Пусть

$$a = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad Y = y + a, \quad X = x - a.$$

Тогда

$$x = \frac{1 + ay}{a + y}, \quad 1 + a(Y - a) = (X + a)Y, \quad XY = 1 - a^2, \quad (10.44)$$

т. е. имеем уравнение гиперболы в координатах X, Y .

Теорема Цемплена. Рассмотрим свойства ударных волн, вытекающие из условия возрастания энтропии. Проведем это рассмотрение на примере совершенного газа, хотя полученные выводы справедливы и в более общем случае [14].

С помощью (10.42) найдем

$$\frac{d(s_2 - s_1)/c_v}{dz} = \frac{(\gamma^2 - 1) z^2}{4\gamma^2(1 + z) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z\right) \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z\right)}. \quad (10.45)$$

Величина z изменяется в пределах $-1 \leq z < \infty$. Из (10.45) следует, что при $\gamma \geq 1$ имеет место

$$\frac{d(s_2 - s_1)/c_v}{dz} \geq 0.$$

Так как при $z = 0$ имеем $(s_2 - s_1)/c_v = 0$, то из $s_2 - s_1 > 0$ следует $z > 0$. Иначе говоря, из условия возрастания энтропии $s_2 > s_1$ вытекает, что существуют только скачки уплотнения $z > 0$, $p_2 > p_1$. Это предложение называют *теоремой Цемплена*.

Таким образом, и при произвольных интенсивностях имеет смысл лишь верхняя часть адиабаты Гюгонио (выше точки $x = 1$, $y = 1$). Установим неравенства для скоростей, аналогично полученным для слабых ударных волн.

Проведем хорду, соединяющую две точки ударной адиабаты (10.44): первую точку ($x = 1$, $y = 1$) и вторую точку ($x < 1$, $y > 1$). Из вида кривой (10.44) следует, что в первой точке хорда расположена круче касательной, а во второй точке касательная круче хорды. Проводя рассуждения, аналогичные случаю слабых ударных волн, сразу же получим неравенства $u_1 > a_1$, $u_2 < a_2$.

Сильные ударные волны. Выведем выражения для сильных ударных волн.

Положим в формулах (10.37), (10.38) и (10.39) $M^2 \gg 1$:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2}{\gamma + 1}. \quad (10.46)$$

Таким образом, перепад плотности на сильных ударных волнах имеет конечную величину. При $\gamma = 1.4$ имеем $\rho_2/\rho_1 = 6$.

Рассмотрим кратко случай, когда γ изменяется на скачке. Это будет пример ударной волны с изменением уравнения состояния при переходе через разрыв. Другим примером служит теория детонационных волн [8].

Формула (10.34) имеет вид

$$\frac{p_2}{\rho_1 u_1^2} = \frac{1}{\gamma_1 M^2} + 1 - x, \quad (10.47)$$

а формула (10.35) запишется так:

$$\frac{p_2}{\rho_1 u_1^2} x = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{\gamma_2 M^2} + \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} (1 - x^2). \quad (10.48)$$

Приравнивая, получим

$$x(1 - x) + \frac{x}{\gamma_1 M^2} = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{\gamma_2 M^2} + \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} (1 - x^2). \quad (10.49)$$

Применяя к (10.49) приближение сильных ударных волн ($M \rightarrow \infty$), получим

$$x(1 - x) = \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} (1 - x^2), \quad x = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}, \quad (10.50)$$

т. е. предельная формула (10.46) верна и в случае разрыва показателя адиабаты γ .

Лекция 11

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗЕ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Ударные волны с частичной дисперсией. Структура зоны релаксации. Элементарное решение. «Полосатая» структура ударных волн. Ударные волны с полной дисперсией.

Ударные волны служат одним из самых распространенных явлений, встречающихся при разнообразных движениях газовых сред. Ударные волны уже нашли широкое применение во многих областях техники, а также в биологии, медицине. Ударные волны в релаксирующих газах являются мощным инструментом проникания в физическую природу сложных газовых сред в экстремальных условиях.

Ударные волны с частичной дисперсией. Зона релаксации

Рассмотрим развитие релаксационных процессов в окрестности ударной волны. Считаем для простоты, что ударная волна прямая, а втекающий в ударную волну поток однородный и равновесный.

В условиях применимости моделей сплошной среды толщина ударной волны l_s , как правило, очень мала. Поэтому характерное время течения в ударной волне $\tau_s = l_s/u$ (или время изменения состояния газа при переходе через ударную волну) очень мало, поскольку характерная скорость u конечна. Отсюда следует, что для ударных волн выполняется неравенство $\tau_s \ll \tau$ (τ — время релаксации), т. е. поток в окрестности ударной волны близок к замороженному.

Вместе с тем ударные волны являются мощным фактором вывода газа из состояния равновесия, поскольку термодинамические параметры газа p , ρ , T на разрыве изменяются, а релаксационные параметры остаются прежними, как перед ударной волной. Отсюда следует, что течение ниже по потоку от ударной волны занято областью перехода к новому состоянию равновесия.

Здесь, как и в случае течения расширения в сопле Лавала (см. далее лекцию 15), рассмотрим уравнение релаксации общего

вида

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_e(\rho, T) - q}{\tau(\rho, T)}, \quad (11.1)$$

где $dq/dt = u dq/dx$, так как рассматривается стационарное течение.

Пусть u , q_e , τ — постоянные. Будем обозначать индексами 1, 2, 3 параметры перед ударной волной, непосредственно за ней и в окончательном состоянии равновесия после зоны релаксации соответственно. Начало оси Ox поместим на ударную волну. Решение уравнения (11.1) в зоне релаксации с начальным условием $q|_{x=0} = q_2$ имеет вид

$$q(x) = q_e + (q_2 - q_e)e^{-x/(u\tau)}. \quad (11.2)$$

Напомним, что непосредственно на ударной волне релаксационный процесс заморожен, так что $q_1 = q_2$. Решение показывает, что на характерной длине $l = u\tau$ происходит переход к равновесному значению q_e . Величина l называется *длиной релаксации*.

Чтобы понять, как изменяются другие газодинамические переменные в зоне релаксации, рассмотрим точную постановку задачи.

Имеем одномерное стационарное течение. Запишем систему уравнений релаксационной газовой динамики для модели неравновесного возбуждения колебательных степеней свободы молекул двухатомного газа:

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0, \quad \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dh}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (11.3)$$

$$u \frac{de_v}{dx} = \frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau}, \quad h = c_p T + e_v(T_v), \quad p = \rho R T.$$

Существуют первые интегралы этих уравнений:

$$\begin{aligned} \rho u = \rho_2 u_2 = \rho_1 u_1, \quad p + \rho u^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2, \\ h + \frac{u^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_1 + \frac{u_1^2}{2}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Таким образом, распределение переменных в зоне релаксации описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \rho u = \rho_1 u_1, \quad p + \rho u^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2, \quad h + \frac{u^2}{2} = h_1 + \frac{u_1^2}{2}, \\ h = c_p T + e_v(T_v), \quad p = \rho R T, \quad u \frac{de_v}{dx} = \frac{e_v(T) - e_v(T_v)}{\tau}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Эта система в общем случае решается численно. Начальным условием служит соотношение

$$e_v(0) = e_v(T_1).$$

Поскольку единственное дифференциальное уравнение этой системы похоже на модельное уравнение (11.1), можно ожидать, что и численное решение всей системы будет близко к модельному решению. Действительно, характер распределения параметров в зоне релаксации имеет вид монотонного перехода к равновесному состоянию. Это равновесное состояние описывается формулами (11.5), в которых следует положить $T = T_v$, при этом последнее (дифференциальное) уравнение отпадает. Иначе говоря, к первым трем уравнениям (11.5) следует добавить соотношение

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + e_v \left(\frac{p}{\rho R} \right). \quad (11.6)$$

Подставляя его в третье уравнение (11.5), получим три уравнения для определения u_3 , p_3 , ρ_3 .

В общем случае в газе может протекать несколько неравновесных процессов с различными характерными временами релаксации (например, несколько химических реакций). В этом случае зона релаксации имеет так называемую «полосатую» структуру.

Разумеется, и в этом случае можно построить численное решение задачи путем решения системы уравнений типа (11.3), содержащей соответствующее количество дифференциальных уравнений. Однако, если характерные времена релаксации процессов (или групп процессов) сильно различаются, то решение можно упростить. Покажем это на примере двух релаксационных процессов. Имеем модельные уравнения

$$u \frac{dq^{(1)}}{dx} = \frac{q_e^{(1)} - q^{(1)}}{\tau^{(1)}}, \quad u \frac{dq^{(2)}}{dx} = \frac{q_e^{(2)} - q^{(2)}}{\tau^{(2)}}, \quad \tau^{(1)} \ll \tau^{(2)}. \quad (11.7)$$

Здесь и далее верхние индексы (1) и (2) означают номера релаксационных процессов.

Последнее неравенство показывает, что в зоне релаксации первого процесса второй процесс фактически заморожен. Тогда решается первое уравнение при условии, что

$$q^{(2)} = \text{const} = q_2^{(2)} = q_1^{(2)}.$$

После этого решение строится во второй зоне релаксации, где изменяется $q^{(2)}$, а $q^{(1)} = q_e^{(1)}$, так как релаксация первого про-

цесса завершилась. Начальным условием для $q^{(2)}$ служит значение $q_1^{(2)}$, так как $q^{(2)}$ в первой зоне релаксации не изменяется.

Во второй зоне релаксации происходит окончательный переход к равновесию, поэтому в конце этой зоны $q^{(2)} = q_e^{(2)}$. Во второй зоне релаксации параметр $q^{(1)}$ изменяется равномерно. Толщины двух зон релаксации удовлетворяют неравенству $l^{(1)} \ll l^{(2)}$. Аналогичную структуру имеет решение при произвольном количестве неравновесных процессов, для которых

$$\tau_1 \ll \tau_2 \ll \dots \ll \tau_n.$$

Наконец, рассмотрим произвольное течение газа с ударными волнами. Можно ввести три характерных времени: время ударной волны τ_s , характерное время течения $\tau_f = R/u$ и время релаксации τ . В рамках механики сплошной среды обычно справедливы неравенства

$$\tau_s \ll \tau, \quad \tau_s \ll \tau_f. \quad (11.8)$$

В зависимости от соотношения τ и τ_f рассматриваются различные типы течений:

- $\tau \ll \tau_f$ — равновесное течение;
- $\tau \sim \tau_f$ — неравновесное течение;
- $\tau \gg \tau_f$ — замороженное течение.

Неравновесные течения реализуются в том случае, когда длина зоны релаксации порядка характерного размера задачи.

Ударные волны с полной дисперсией *)

Запишем уравнения одномерного стационарного течения вязкого теплопроводного газа:

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho u)}{dx} &= 0, \quad \rho u \frac{du}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} \right), \\ \rho u \frac{dh}{dx} - u \frac{dp}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{du}{dx} \right)^2. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Существуют непрерывные и гладкие решения этих уравнений, описывающие сжатие и торможение газа между стационарными состояниями. После некоторых упрощений решение для рас-

*) Изложение этого вопроса достаточно близко к тексту п. 6.10 монографии [9].

пределения скорости имеет вид (все коэффициенты считаются постоянными)

$$x = k \ln \frac{u_1 - u}{u - u_2}, \quad u_2 < u < u_1, \quad (11.10)$$

$$k = \frac{2\mu}{\rho(\gamma + 1)(u_1 - u_2)} \left[\frac{4}{3} + \frac{(\gamma - 1)\lambda}{\mu c_p} \right].$$

Это решение в литературе называют *структурой ударной волны*.

Рассматривается аналогичное решение уравнений движения совершенного двухатомного газа с колебательной релаксацией. Вязкость и теплопроводность газа не учитываются. Одномерное стационарное течение описывается уравнениями (11.3). Для простоты будем считать все теплоемкости постоянными:

$$e_v(T_v) = \dot{e}_v T_v, \quad e_v(T) = \dot{e}_v T, \quad \dot{e}_v = \text{const}.$$

Исключая h , p , ρ , получим

$$(a_f^2 - u^2) \frac{du}{dx} + (\gamma - 1)u\dot{e}_v \frac{dT_v}{dx} = 0, \quad (11.11)$$

$$c_p \frac{dT}{dx} + \dot{e}_v \frac{dT_v}{dx} + u \frac{du}{dx} = 0, \quad \tau u \frac{dT_v}{dx} = T - T_v.$$

Из этой системы уравнений исключим dT/dx и dT_v/dx , в результате получим нелинейное уравнение для u . Сначала исключим dT_v/dx из первого и третьего уравнений (11.11):

$$(a_f^2 - u^2) \frac{du}{dx} + (\gamma - 1)\dot{e}_v \frac{T - T_v}{\tau} = 0. \quad (11.12)$$

Дифференцируя (11.12) по x и подставляя в результат dT/dx и dT_v/dx из первого и второго уравнений (11.11), после приведения подобных членов получим

$$\frac{c_v}{c_{ve}} \tau u \frac{d}{dx} \left[(a_f^2 - u^2) \frac{du}{dx} \right] + (a_e^2 - u^2) \frac{du}{dx} = 0, \quad c_{ve} = c_v + \dot{e}_v. \quad (11.13)$$

Используя первые интегралы системы (11.11)

$$\rho u = Q, \quad p + \rho u^2 = F$$

и следующее из них равенство

$$a_e^2 = \gamma_e \left(\frac{Fu}{Q} - u^2 \right)$$

и деля на u , перепишем уравнение (11.13) в следующем виде:

$$\frac{c_v}{c_{ve}} \tau \frac{d}{dx} \left[(a_f^2 - u^2) \frac{du}{dx} \right] + \left[\gamma_e \left(\frac{F}{Q} - u \right) - u \right] \frac{du}{dx} = 0. \quad (11.14)$$

Первый интеграл этого уравнения с учетом граничных условий далеко впереди ударной волны

$$u = u_\infty, \quad a_e = a_{e\infty}, \quad \frac{du}{dx} = 0$$

запишется так:

$$\frac{c_v}{c_{ve}} \tau (a_f^2 - u^2) \frac{du}{dx} + \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_e - 1) (u^2 - u_\infty^2) + a_e^2 - a_{e\infty}^2 \right\} = 0. \quad (11.15)$$

Поскольку далеко вниз по потоку от ударной волны также должно быть $du/dx = 0$, уравнение (11.15) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{c_v}{c_{ve}} \tau (a_f^2 - u^2) \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} (\gamma_e + 1) (u - u_s) (u_\infty - u), \quad (11.16)$$

где u_s — скорость позади волны. Это уравнение получено следующим образом. Преобразуем выражение в фигурных скобках из уравнения (11.15) с учетом формулы для a_e^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\gamma_e - 1) (u^2 - u_\infty^2) + a_e^2 - a_{e\infty}^2 &= \frac{1}{2} (\gamma_e - 1) (u^2 - u_\infty^2) + \\ &+ \gamma_e \left(\frac{Fu}{Q} - u^2 \right) - \gamma_e \left(\frac{Fu_\infty}{Q} - u_\infty^2 \right) = \\ &= (u - u_\infty) \left[-\frac{1}{2} (\gamma_e + 1) (u + u_\infty) + \gamma_e \frac{F}{Q} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} (\gamma_e + 1) (u - u_\infty) \left[u + u_\infty - \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + 1} \frac{F}{Q} \right]. \end{aligned}$$

Определяя

$$u_s = \frac{2\gamma_e}{\gamma_e + 1} \frac{F}{Q} - u_\infty,$$

получим уравнение (11.16).

Это уравнение описывает монотонное изменение скорости в волне сжатия, т. е. u уменьшается от u_∞ до u_s . Поэтому производная du/dx всегда отрицательна и конечна, т. е. всегда должно быть $u < a_f$. Иначе говоря, ударные волны с полной дисперсией

движутся по покоящемуся газу (или газ втекает в ударную волну) со скоростью, меньшей замороженной скорости звука.

Используя данное выше определение u_s и формулу для a_e^2 , легко получить следующие равенства:

$$u_\infty - u_s = \frac{2(u_\infty^2 - a_{e\infty}^2)}{(\gamma_e + 1)u_\infty} = \frac{2(a_{es}^2 - u_s^2)}{(\gamma_e + 1)u_s}. \quad (11.17)$$

Так как $u_\infty > u_s$, то $u_\infty > a_{e\infty}$ и $u_s < a_{es}$. Учитывая, что имеет место $u_\infty < a_{f\infty}$, можно получить

$$a_{e\infty} < u_\infty < a_{f\infty}. \quad (11.18)$$

Это неравенство определяет область существования волн с полной дисперсией. Скорость волны по газу незначительно превышает $a_{e\infty}$, так как a_e и a_f , как правило, близки. Поэтому ударная волна с полной дисперсией неизбежно должна быть слабой.

Интегрирование уравнения с разделяющимися переменными (11.16) позволяет получить профиль скорости в ударной волне с полной дисперсией. Отметим, что он становится более крутым в передней части волны по мере приближения u_∞ к $a_{f\infty}$. Если u_∞ превосходит $a_{f\infty}$, получаем ударную волну с частичной дисперсией.

Лекция 12

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Задача о поршне, вдвигающемся в газ. Распад произвольного разрыва: простейшая модель течения в ударной трубе. Задача о сильном взрыве.

Здесь рассмотрим относительно простые нестационарные течения газа с ударными волнами. Как уже отмечалось, в реальных условиях газовых потоков почти всегда присутствуют ударные волны.

Задача о поршне, вдвигающемся в газ

Пусть в момент времени $t = 0$ газ покоится в полубесконечной трубе, с одного конца закрытой поршнем, а сам поршень начинает вдвигаться в газ со скоростью U . Поскольку указанное движение, очевидно, приведет к сжатию газа, то его температура повысится и увеличится скорость звука. Напомним, что уравнение характеристики C_+ (прямолинейной, если решение описывается простой волной, а это именно так, поскольку область возмущенного течения граничит с областью покоя) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = U + a, \quad \text{т. е.} \quad x - U\tau = (U + a)(t - \tau). \quad (12.1)$$

Поскольку $U > 0$ и $a > a_0$, характеристика C_+ направлена в сторону граничной характеристики $x = a_0 t$. Произойдет пересечение этих характеристик, приводящее к неоднозначности решения, так как, например, на граничной характеристике $v = 0$, а на C_+ имеем $v = U$. Это не что иное как уже известное нам опрокидывание простой волны сжатия. Заметим, что при законе движения поршня $x = Ut$, $U = \text{const}$ эти рассуждения справедливы для любой характеристики C_+ , сколь угодно близко лежащей к начальной точке. Таким образом, решение данной задачи должно содержать разрыв.

Построим решение с ударной волной. Очевидно, уравнениям и граничным условиям удовлетворяет следующее решение: впереди поршня, движущегося со скоростью U , со скоростью V (заранее не известной) движется ударная волна; между поршнем

и ударной волной газ движется с постоянной скоростью U ; впереди ударной волны газ покоится. Состояние покоящегося газа известно: давление p_1 , плотность ρ_1 . Определим состояние газа за ударной волной и скорость ударной волны V .

Для этого используем соотношения на прямом скачке. Скорости газа относительно скачка запишутся так:

$$u_1 = -V, \quad u_2 = -V + U, \quad M^2 = \frac{V^2}{a_0^2}. \quad (12.2)$$

Подставим (12.2) в выражение для отношения скоростей на прямом скачке. Получим

$$\frac{V}{V - U} = \frac{(\gamma + 1)V^2/a_0^2}{2 + (\gamma - 1)V^2/a_0^2}. \quad (12.3)$$

Сокращая на V ($V \neq 0$), получим квадратное уравнение для определения V

$$V^2 - \frac{\gamma + 1}{2} UV - a_0^2 = 0. \quad (12.4)$$

Решение имеет вид

$$V = \frac{\gamma + 1}{4} U + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16} + a_0^2}. \quad (12.5)$$

Соответственно траектории ударной волны и поршня имеют вид

$$x = \left(\frac{\gamma + 1}{4} U + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16} + a_0^2} \right) t, \quad x = Ut \quad (12.6)$$

(легко убедиться, что ударная волна обгоняет поршень и ее скорость больше скорости звука a_0). Подставляя (12.6) в условие на скачке для давления, получим p за ударной волной:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = 1 - \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} \frac{U^2}{a_0^2} + \gamma \frac{U}{a_0} \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} \frac{U^2}{a_0^2} + 1}. \quad (12.7)$$

Распад произвольного разрыва

Как мы уже видели, на газодинамических разрывах (ударных волнах) должны выполняться определенные соотношения между газодинамическими величинами. Если эти соотношения не выполняются, разрыв существовать не может, он должен распасться.

Рассмотрим один важный частный случай распада произвольного разрыва: пусть два столба покоящегося газа разделены перегородкой; например, в правом столбе $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, а в левом $p = p_5$, $\rho = \rho_5$, причем $p_1 > p_5$, $\rho_1 > \rho_5$. Такое устройство широко используется в технике газодинамического эксперимента и называется *ударной трубой*. В момент времени $t = 0$ перегородка снимается. В ударной трубе обычно $T_1 = T_5$; это соотношение связывает разрывы плотности и давления.

Легко себе представить, что после снятия перегородки начнется движение газа в сторону меньшего давления. Поскольку задача не имеет характерной длины (или времени), а характерная скорость имеется (это скорость звука в покоящемся газе), можно ожидать из соображений размерности, что все течение будет зависеть только от комбинации $x/(at)$, т. е. скорости образующихся при распаде произвольного разрыва поверхностей газодинамических разрывов будут постоянными. Так как

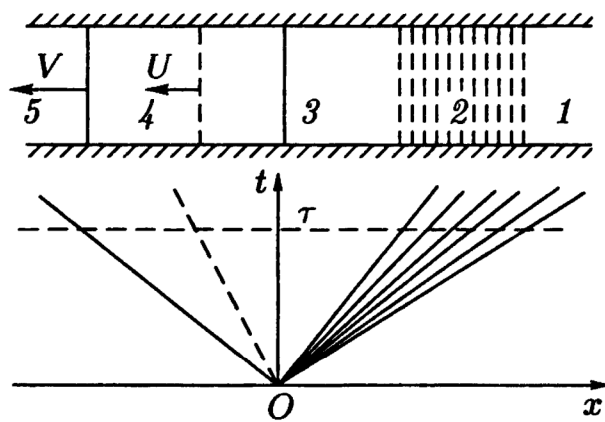


Рис. 12.1. Распад произвольного разрыва

задача сохраняет одномерный характер (параметры постоянны по сечению трубы), то газы не смешиваются, и плоскость их раздела, расположенная при $t = 0$ в точке $x = 0$, будет двигаться с постоянной скоростью.

Это наводит на мысль построить искомое решение задачи как комбинацию решений двух задач о вдвигании и выдвигании поршня

из трубы, рассмотренных ранее. Изобразим течение в физической плоскости и в координатах (x, t) (рис. 12.1).

На основании полученных ранее решений выпишем формулы для параметров газа во всех пяти областях. Для простоты будем считать первоначально разделенные газы одинаковыми, т. е. положим $\gamma_1 = \gamma_5 = \gamma$.

1. Газ покоится:

$$v = 0, \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1, \quad a = a_1.$$

2. Центрированная волна разрежения:

$$v = \frac{2a_1}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{a_1 t} - 1 \right), \quad a = \frac{2a_1}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \frac{x}{a_1 t} + 1 \right), \quad (12.8)$$

$$p = \left(\frac{\rho_1^\gamma}{p_1} \right)^{1/\gamma-1} \left(\frac{a^2}{\gamma} \right)^{\gamma/\gamma-1}, \quad \rho = \left(\frac{\rho_1^\gamma}{p_1} \right)^{1/\gamma-1} \left(\frac{a^2}{\gamma} \right)^{1/\gamma-1},$$

$$1 - \frac{\gamma+1}{2} \frac{U}{a_1} < \frac{x}{a_1 t} < 1, \quad U > 0,$$

U — скорость контактной поверхности.

3. Однородное движение:

$$v = -U, \quad a = a_1 - \frac{\gamma-1}{2} U; \quad (12.9)$$

величины p и ρ см. п. 2.

4. Однородное движение:

$$v = -U,$$

$$p_4 = p_5 \left(1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \frac{U^2}{a_5^2} + \gamma \frac{U}{a_5} \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} \frac{U^2}{a_5^2} + 1} \right),$$

$$\rho_4 = \rho_5 \frac{(\gamma+1)M^2}{(\gamma-1)M^2 + 2}, \quad M = \frac{V}{a_5},$$

$$V = \frac{\gamma+1}{4} U + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2 U^2}{16} + a_5^2}.$$

5. Газ покоится:

$$v = 0, \quad p = p_5, \quad \rho = \rho_5, \quad a = a_5.$$

В этих формулах скорость контактной поверхности U заранее не известна. Ее следует определить из условия равенства давлений на контактной поверхности $p_3 = p_4$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p_1/\rho_1^\gamma)^{1/(\gamma-1)}} \left[\frac{1}{\gamma} \left(a_1 - \frac{\gamma-1}{2} U \right)^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = \\ & = p_5 \left(1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \frac{U^2}{a_5^2} + \gamma \frac{U}{a_5} \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{16} \frac{U^2}{a_5^2} + 1} \right). \end{aligned} \quad (12.10)$$

Из этого уравнения следует определить U в зависимости от p_1 , ρ_1 , p_5 , ρ_5 .

Задача о сильном взрыве

В момент времени $t = 0$ в покое газе в центре симметрии происходит взрыв, т. е. мгновенно выделяется конечная энергия E_0 . Размерами и массой взрывчатого вещества, выделяющего энергию, пренебрегается. Требуется определить движение при $t > 0$.

Поскольку скорость распространения возмущений в газе конечна, область возмущенного газа будет ограничена симметричной ударной волной. В силу пространственной симметрии уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (12.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (12.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad (12.13)$$

Здесь $\nu = 1$ для плоских, $\nu = 2$ для цилиндрических и $\nu = 3$ для сферических волн.

Поставим граничные условия на ударной волне. Рассматривается начальная стадия взрыва, когда ударную волну можно считать сильной. Запишем условия на сильной ударной волне, вводя в качестве основной характеристики скорость ударной волны V_s . Из соотношений на ударной волне в совершенном газе имеем

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M^2}{\gamma + 1}, \quad M^2 = \frac{V_s^2}{a^2}, \quad (12.14)$$

$$u_1 = -V_s, \quad u_2 = v_s - V_s, \quad p_2 = p_s, \quad \rho_2 = \rho_s.$$

Здесь v_s — скорость газа за ударной волной в абсолютной системе координат. Подставляя выражения для скоростей u_1 и u_2 в соотношения на скачке (12.14), получим

$$v_s = \frac{2}{\gamma + 1} V_s, \quad \rho_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1, \quad p_s = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 V_s^2. \quad (12.15)$$

Величина V_s заранее не известна; ее следует определить в процессе решения задачи.

Как видно из постановки задачи, решение определяется лишь двумя размерными определяющими константами: ρ_1 и E_0 . Весь набор определяющих решение величин имеет следующий вид:

$$\rho_1, E_0, r, t, \gamma. \quad (12.16)$$

Напомним размерности этих величин:

$$[\rho_1] = ML^{-3}, \quad [E_0] = ML^{\nu-1}T^{-2}, \quad [r] = L, \quad [t] = T, \quad [\gamma] = 1.$$

Отметим, что размерность энергии заряда зависит от параметра ν . Здесь M — масса, L — длина, T — время.

Из общих соображений теории размерностей следует, что все зависимые размерные величины могут зависеть только от двух безразмерных комбинаций:

$$\gamma, \lambda = k \left(\frac{\rho_1}{E_0} \right)^{1/(\nu+2)} \frac{r}{t^{2/(\nu+2)}}. \quad (12.17)$$

Здесь k — некоторая безразмерная константа.

Таким образом, данное решение зависит от x, t только в комбинации (12.17), т. е. решение зависит от одной переменной и, следовательно, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Такое решение называется *автомодельным*.

Удобно независимую переменную λ записать так:

$$\lambda = \frac{r}{(E/\rho_1)^{1/(\nu+2)} t^{2/(\nu+2)}}. \quad (12.18)$$

Очевидно, величина E , как и E_0 , имеет размерность энергии.

Определим положение ударной волны, не решая задачи в целом. Для координаты ударной волны должна выполняться зависимость $r_s = r_s(t)$. Поскольку из параметров t, ρ_1, E нельзя образовать безразмерной комбинации (потому что из r, t, ρ_1, E можно образовать только одну), то положение ударной волны должно удовлетворять соотношению

$$\lambda = \text{const} = \lambda^*. \quad (12.19)$$

Полагая для определенности $\lambda^*=1$ (у нас уже есть в (12.18) один свободный безразмерный коэффициент E/E_0), получим закон движения ударной волны в следующей форме:

$$r_s = \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/(\nu+2)} t^{2/(\nu+2)}. \quad (12.20)$$

Скорость ударной волны после логарифмического дифференцирования (12.20) запишется так:

$$V_s = \frac{dr_s}{dt} = \frac{2}{\nu + 2} \frac{r_s}{t}. \quad (12.21)$$

Формула (12.20) хорошо согласуется с опытными данными [19].

Будем теперь искать решение задачи. Из соображений размерности с учетом набора определяющих параметров (12.16) следует, что решение нужно искать в таком виде:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_1 R(\lambda), \quad p = \rho_1 \frac{r^2}{t^2} P(\lambda). \quad (12.22)$$

Функции V , R , P безразмерные. Их нужно подставить в уравнения (12.11)–(12.13) и провести необходимые элементарные преобразования. Получаемые при этом обыкновенные дифференциальные уравнения имеют достаточно сложный вид; они приведены в уже цитированной книге Л. И. Седова [19] для общего случая автомодельных движений.

Запишем условия на ударной волне в новых переменных. Подставляя (12.21) и (12.22) в (12.15), получим ($\lambda = 1$)

$$v_s = \frac{r_s}{t} V(1) = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{2}{\nu + 2} \frac{r_s}{t}, \quad V(1) = \frac{4}{(\gamma + 1)(\nu + 2)}. \quad (12.23)$$

Аналогично,

$$R(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad P(1) = \frac{8}{(\gamma + 1)(\nu + 2)^2}. \quad (12.24)$$

Введем новую переменную $Z = \gamma P/R$. На ударной волне

$$Z(1) = \frac{8\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2 (\nu + 2)^2}. \quad (12.25)$$

На первый взгляд кажется, что полученные обыкновенные дифференциальные уравнения допускают лишь численное решение. В 1945 г. Л. И. Седов нашел единственное решение этих уравнений, вытекающее из интеграла энергии и дающее решение задачи о сильном взрыве в аналитической форме. Это решение имеет вид

$$Z = \frac{(\gamma - 1) V^2 \left(V - \frac{2}{\nu + 2} \right)}{2 \left[\frac{2}{\gamma(\nu + 2)} - V \right]}. \quad (12.26)$$

Последующие уравнения позволяют простыми квадратурами найти функции $R(V)$, $\lambda(V)$, дающие полное решение поставленной задачи.

На рис. 12.2 показано распределение относительной плотности по радиусу в случае сферического взрыва. Видно, что основная масса газа концентрируется в окрестности ударной волны. Это обстоятельство послужило в дальнейшем основой для развития приближенной теории сильного взрыва в более сложных условиях.

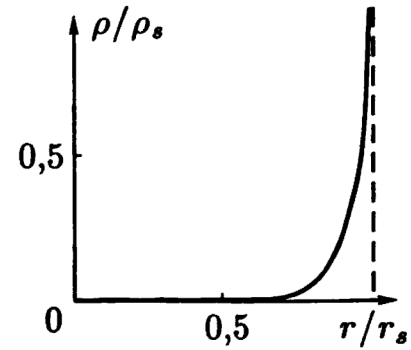


Рис. 12.2. Распределение плотности по радиусу при сферическом сильном взрыве

Лекция 13

ОБЩИЕ СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНОГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

Общие уравнения движения однородного сжимаемого газа. Интеграл Бернулли. Изменения параметров вдоль линии тока. Важные определения: параметры торможения, максимальная скорость, скорость звука, критические параметры, число Маха, коэффициент скорости. Выражения для параметров потока через параметры торможения и числа M и λ : газодинамические функции.

В этой лекции вводятся некоторые понятия и свойства, которые широко используются при обсуждении течений газа и при решении задач. Большинство этих понятий и свойств не зависят от конкретной модели уравнений состояния, однако вводятся они на примере совершенного газа исключительно по соображениям простоты аналитических выражений.

Общие уравнения движения однородного сжимаемого газа

Полная система уравнений движения однородного сжимаемого газа с учетом вязкости и теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \quad (13.2)$$

$$\rho \left(\frac{de}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} \right) = \rho \left(\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (13.3)$$

$$s = s(\rho, e), \quad \left(\frac{1}{T} = \frac{\partial s}{\partial e} \Big|_{\rho}, -\frac{p}{\rho^2 T} = \frac{\partial s}{\partial \rho} \Big|_e \right). \quad (13.4)$$

Для наглядности последующего изложения приведем здесь также уравнение производства энтропии (оно является следствием

уравнения (13.4) и не может рассматриваться как дополнительное независимое уравнение):

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T^2} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (13.4')$$

Неизвестные величины: ρ , $\mathbf{v}$, e , s , p , T . Имеем шесть уравнений для указанных шести неизвестных, если имеются выражения для $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\sigma}$. Для случая совершенного газа с постоянным отношением теплоемкостей имеем

$$s = s_1 + c_v \ln \frac{e/e_1}{(\rho/\rho_1)^{\gamma-1}} \quad \left(T = \frac{e}{c_v}, p = \rho R T \right). \quad (13.5)$$

Интеграл Бернулли

Рассмотрим некоторые общие свойства течений газа на основе изучения первых интегралов системы (13.1)–(13.4), которые получаются для упрощенных условий движения.

Рассмотрим стационарное непрерывное движение невязкого газа. В этом случае уравнение (13.2), в котором следует положить $\boldsymbol{\sigma} = 0$, имеет первый интеграл, который вдоль линии тока можно записать так:

$$\frac{v^2}{2} + P(p, L) = i^*(L), \quad P = \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho(p, L)}. \quad (13.6)$$

Здесь интеграл берется вдоль линии тока; i^* — константа интегрирования, которая может иметь разные значения на разных линиях тока.

Рассмотрим теперь случай адиабатического движения, когда приток тепла к частице газа отсутствует, т. е. $\mathbf{q} = 0$. Тогда из уравнения (13.3) следует

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} h - \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p = 0, \quad \mathbf{v} = v \mathbf{t}_v. \quad (13.7)$$

Интегрируя (13.7) вдоль линий тока, получим $P = h$, так как оператор $\mathbf{t}_v \cdot \operatorname{grad}$ означает производную вдоль линии тока. Тогда уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + h = H_0(L). \quad (13.8)$$

Здесь аддитивная константа интегрирования $H_0(L)$ имеет смысл величины энтальпии в той точке линии тока, где скорость обращается в нуль, и называется *энтальпией торможения*.

Заметим также, что из уравнения (13.4') следует, что в рассматриваемом классе движений энтропия вдоль линии тока остается постоянной:

$$s = s_0(L). \quad (13.9)$$

Таким образом, имеем два первых интеграла, (13.8) и (13.9). Запишем их конкретные выражения для совершенного газа с постоянными теплоемкостями, выбирая в качестве термодинамических переменных плотность ρ и давление p . Имеем

$$h = c_p T = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (c_p - c_v = R). \quad (13.10)$$

Из формулы (13.8) получим

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = H_0(L). \quad (13.11)$$

Используя уравнение состояния совершенного газа в переменных p , ρ , s , можно записать

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma \exp \left(\frac{s - s_1}{c_v} \right), \quad s = s_0(L), \quad p = C(L) \rho^\gamma. \quad (13.12)$$

Последняя формула выражает *адиабату Пуассона*.

Таким образом, для совершенного газа имеем два первых интеграла, (13.11) и (13.12).

Свойства движения

Из соотношений (13.11) и (13.12) следует, что вдоль линии тока с увеличением скорости давление и плотность падают. Из уравнения Клапейрона и (13.12) вытекает, что падает также и температура.

Важные определения

Параметры торможения. Мы уже ввели энтальпию торможения H_0 . Введем также температуру торможения из условия $H_0 = c_p T_0$. Затем можно с помощью уравнения Клапейрона и последней формулы (13.12) определить p_0 и ρ_0 . Заметим, что температура торможения определяется только полным теплосодержанием (энтальпией торможения H_0), а p_0 и ρ_0 зависят еще от энтропии s_0 .

Если на линии тока есть точка, где $v = 0$, то в этой точке $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $T = T_0$. Если же такой точки нет, то параметры

торможения вводятся фиктивно как параметры, которые имела бы частица газа, если бы ее из данного состояния затормозить непрерывно и адиабатически до состояния покоя.

Максимальная скорость истечения. Из уравнения (13.11) видно, что на линии тока максимальная скорость реализуется при условии $p = 0$. Имеем

$$v_{\max} = \sqrt{2 H_0}. \quad (13.13)$$

Иначе говоря, максимальная скорость соответствует истечению в вакуум. Из уравнения Клапейрона и последней формулы (13.12) следует, что при $p = 0$ имеем $\rho = T = 0$. Важно отметить, что условие (13.13) существенно связано со стационарным характером течения.

Скорость звука, критические параметры. Как мы знаем из теории звука, скорость звука в газе определяется по формуле

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s. \quad (13.14)$$

Иначе говоря, мы должны записать уравнение состояния в виде функции $p = p(\rho, s)$ и взять одну частную производную. Используем последнюю формулу (13.12) и получим

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = C \gamma \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (13.15)$$

Тогда интеграл Бернулли (13.11) можно записать так:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = H_0 = \frac{v_{\max}^2}{2}. \quad (13.16)$$

Отсюда видно, что с увеличением скорости v скорость звука a убывает. Из уравнения Клапейрона можно записать

$$a^2 = \gamma R T. \quad (13.17)$$

Последняя формула позволяет легко связать скорость звука с энтальпией. Имеем

$$a^2 = \gamma R T = \frac{\gamma R}{c_p} c_p T = \frac{\gamma(c_p - c_v)}{c_p} h = (\gamma - 1)h, \quad h = \frac{a^2}{\gamma - 1}. \quad (13.18)$$

Из (13.17) легко также убедиться, что максимальное значение скорости звука соответствует точке торможения

$$a_0^2 = \gamma R T_0, \quad (13.19)$$

а минимальное, равное нулю, возникает при истечении в вакуум. Таким образом, вдоль линии тока при монотонном разгоне потока скорость v увеличивается от 0 до $v_{\max}$, а скорость звука убывает от значения (13.19) до 0. Поэтому существует точка, в которой $v = a$. Значение скорости газа, равное скорости звука в этой же точке, называется *критической скоростью* v_* . Значение критической скорости через параметры торможения (или $v_{\max}$) легко получить из (13.16):

$$\frac{v_*^2}{2} + \frac{v_*^2}{\gamma - 1} = H_0 = \frac{v_{\max}^2}{2}, \quad v_*^2 = 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} H_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_{\max}^2. \quad (13.20)$$

Можно выразить v_* через скорость звука в заторможенном состоянии:

$$v_*^2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_0^2. \quad (13.21)$$

Выразим другие критические параметры через соответствующие параметры торможения. Полагая $v_* = a_*$ и используя формулу (13.17) в (13.21), получим

$$T_* = \frac{2}{\gamma + 1} T_0. \quad (13.22)$$

Из уравнения Клапейрона и адиабаты Пуассона получим

$$\frac{p_*}{p_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \frac{T_*}{T_0}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (13.23)$$

Подставляя (13.22) в (13.23) и решая два уравнения, получим

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (13.24)$$

Число Маха, коэффициент скорости. Важным критерием служит отношение скорости газа к местной скорости звука, т. е. *число Маха* M .

Поскольку с монотонным ростом скорости местная скорость звука монотонно убывает, то условию $M < 1$ соответствует условие $v/a_* < 1$, а условию $M > 1$ соответствует условие $v/a_* > 1$. Поэтому наряду с M рассматривается *коэффициент скорости* $\lambda = v/a_*$.

У числа M вдоль линии тока изменяется знаменатель и числитель, а у числа λ только числитель.

Из предыдущих формул очевидны неравенства

$$0 \leq M < \infty, \quad 0 \leq \lambda \leq \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}. \quad (13.25)$$

Установим связь между параметрами M и λ . Запишем из (13.16) и (13.20)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = H_0 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{v_*^2}{2}. \quad (13.26)$$

Деля обе части (13.26) на a^2 , получим

$$\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{1}{2} \frac{M^2}{\lambda^2}. \quad (13.27)$$

Разрешая (13.27) относительно λ^2 , получим

$$\lambda^2 = \frac{\frac{\gamma + 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M^2}}. \quad (13.28)$$

Выражения для параметров потока через параметры торможения и числа M и λ

Первый интеграл в (13.12) и уравнение Клапейрона позволяют установить зависимости, аналогичные (13.23):

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (13.29)$$

Формулы (13.29) позволяют выразить отношения давлений и плотностей через отношение температур:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (13.30)$$

Вернемся к интегралу Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = c_p T_0, \quad c_p T = \frac{a^2}{\gamma - 1}. \quad (13.31)$$

Деля (13.31) на $c_p T$, с учетом второго равенства получим

$$\frac{\gamma - 1}{2} M^2 + 1 = \frac{T_0}{T}. \quad (13.32)$$

С учетом (13.29) имеем

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (13.33)$$

Разделим теперь (13.31) на $c_p T_0$:

$$\frac{v^2}{2c_p T_0} + \frac{T}{T_0} = 1, \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{2H_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2 \quad (13.34)$$

согласно (13.20). Снова из (13.29) получим

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (13.35)$$

Выражения (13.32)–(13.35) называются *газодинамическими функциями*.

Подчеркнем, что до сих пор мы изучали лишь связи между параметрами стационарного непрерывного адиабатического течения совершенного невязкого газа, не рассматривая конкретные течения. Ниже мы рассмотрим простейшее одномерное течение; разумеется, приведенные выше соотношения будут справедливы в одномерном течении.

Лекция 14

ОДНОМЕРНАЯ ТЕОРИЯ СОПЛА ЛАВАЛЯ

Течение в трубке тока. Уравнение обращения воздействия. Переход через скорость звука. Сопло Лавалья. Формула сопла Лавалья. Течение релаксирующего газа — пример неизэнтропического течения. Замороженная скорость звука. Течение газа через простое сопло. Течение через сопло Лавалья с уменьшением противодавления: расчетный и нерасчетный режимы.

Рассмотрим в стационарном потоке сжимаемого газа замкнутую линию, например окружность малого (по сравнению с характерным размером потока) диаметра. Проведем линии тока через каждую точку этой окружности. Поверхность, образованная этими линиями, называется *трубкой тока*.

Поскольку трубка тока считается тонкой, то распределение параметров по сечению S , нормальному к некоторой воображаемой оси, можно считать постоянным. Сечение S ориентируется по нормали к скорости газа. Течение в такой трубке называется *одномерным*.

Закон сохранения массы для одномерного течения запишется так:

$$\rho v S = Q = \text{const} . \quad (14.1)$$

Эта формула получается из исходного закона сохранения массы в интегральной форме, если в качестве объема взять отрезок трубки тока, ограниченный сечениями S_1 и S_2 , и учесть, что поток массы через поверхность трубки тока отсутствует.

Соотношение (14.1) вместе с первыми интегралами Бернулли и адиабатичности составляет замкнутую систему уравнений для описания одномерного стационарного течения.

Уравнение обращения воздействия

Для анализа свойств течения воспользуемся, однако, уравнениями в дифференциалах. Уравнение импульса в стационарном течении

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad (14.2)$$

с помощью известной из векторного анализа формулы

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 \quad (14.3)$$

запишется следующим образом:

$$\frac{1}{2} \text{grad } v^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0. \quad (14.4)$$

Вычисляя проекцию на линию тока и заменяя производные вдоль линии тока дифференциалами, получим

$$v dv + \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (14.5)$$

Запишем уравнение адиабаты Пуассона в дифференциалах вдоль линии тока:

$$dp = C \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho = \frac{\gamma C \rho^{\gamma}}{\rho} d\rho = \frac{\gamma p}{\rho} d\rho = a^2 d\rho. \quad (14.6)$$

Наконец, запишем в дифференциалах уравнение (14.1):

$$\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (14.7)$$

Здесь dS — дифференциал площади поперечного сечения. Исключим dp из (14.5) и (14.6):

$$v dv = -\frac{a^2}{\rho} d\rho, \quad (14.8)$$

а затем $d\rho$ из последних двух формул:

$$v dv + a^2 \left(-\frac{dv}{v} - \frac{dS}{S} \right) = 0, \quad \frac{v}{a^2} dv - \frac{dv}{v} - \frac{dS}{S} = 0. \quad (14.9)$$

Используя число Маха, получим

$$\frac{dv}{v} (M^2 - 1) = \frac{dS}{S}. \quad (14.10)$$

Это уравнение называют *уравнением обращения воздействия*.

Пусть скорость потока увеличивается вдоль трубки тока, т. е. $dv > 0$. Тогда при дозвуковой скорости ($M < 1$) сечение трубки тока должно уменьшаться ($dS < 0$), а при сверхзвуковой скорости — увеличиваться ($dS > 0$). Самое узкое сечение ($dS = 0$) соответствует звуковой скорости, т. е. $M = 1$.

Указанное свойство является способом достижения сверхзвуковой скорости потока. Необходимо выполнить канал в виде сужающейся-расширяющейся трубы. Тогда при выполнении

определенных условий, обеспечивающих плавное истечение из трубы, в расширяющейся части канала возникает сверхзвуковой поток. Это устройство называется *соплом Лавала*.

Соотношение (14.10) демонстрирует принципиальное отличие течений сжимаемого газа от несжимаемой жидкости. В последнем случае уравнение расхода $vS = Q$ показывает, что трубка тока в ускоряющемся потоке монотонно сужается.

В сжимаемом газе плотность потока (удельный расход) ρv ведет себя немонотонно. Из уравнения расхода (14.1) следует, что по мере увеличения скорости газа величина ρv сначала возрастает до максимального значения в самом узком сечении канала, а затем убывает. Поскольку в минимальном сечении $S_{\min}$ скорость равна скорости звука, то максимальное значение плотности потока с учетом определения скорости звука и формул (13.24) равно

$$(\rho v)_{\max} = \rho_* v_* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}. \quad (14.11)$$

Из (14.11) следует, что максимально возможное значение расхода газа через трубку тока равно

$$Q_{\max} = (\rho v)_{\max} S_{\min} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} S_{\min}. \quad (14.12)$$

Формула сопла Лавала

Определим теперь изменение числа Маха вдоль трубки тока. Напомним, что, имея такую зависимость, изменения других параметров найдем с помощью так называемых газодинамических функций

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)},$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

где T_0 , ρ_0 , p_0 — параметры торможения. Из (14.1) имеем

$$\frac{S}{S_{\min}} = \frac{\rho_* v_*}{\rho v}, \quad (14.13)$$

так как скорость звука достигается в минимальном сечении трубки тока. Учитывая связи между критическими параметра-

ми T_* , ρ_* , p_* и параметрами торможения, из газодинамических функций получим

$$\frac{\rho_*}{\rho} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (14.14)$$

Далее,

$$\frac{v_*}{v} = \frac{v_*}{a} \frac{1}{M} = \left(\frac{T_*}{T} \right)^{1/2} \frac{1}{M} = \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{1/2} \frac{1}{M}. \quad (14.15)$$

Подставляя (14.14), (14.15) в (14.13), получим

$$\frac{S}{S_{\min}} = \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(2(\gamma-1))} \frac{1}{M}. \quad (14.16)$$

Соотношение (14.16) называют *формулой сопла Лавала*.

Из этой формулы следует, что число Маха в каждом сечении сопла определяется только данным сечением и не зависит от продольного изменения контура.

График функции (14.16) представлен на рис. 14.1. Ветви кривой при малых и больших M ведут себя следующим образом:

$$\frac{S}{S_{\min}} \sim \frac{1}{M} \quad \text{при } M \ll 1,$$

$$\frac{S}{S_{\min}} \sim M^{2/(\gamma-1)} \quad \text{при } M \gg 1.$$

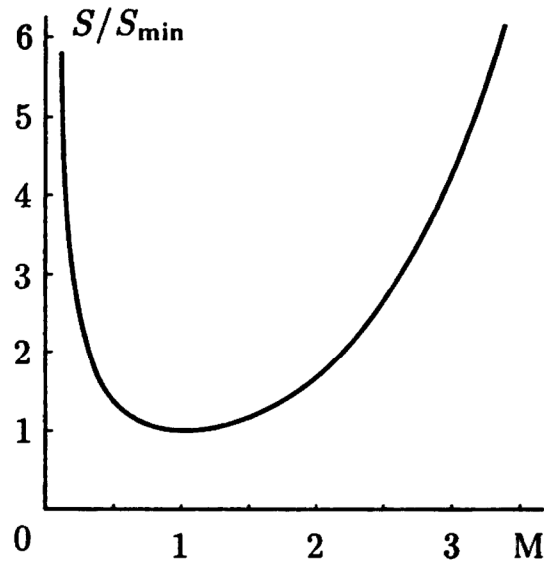


Рис. 14.1. Формула сопла Лавала

Течение релаксирующего газа

Рассмотрим теперь течение релаксирующего газа. Используем для этой цели модель сжимаемой среды, описывающую течение совершенного двухатомного газа с колебательной релаксацией. Уравнение движения и уравнение притока тепла по-прежнему допускают интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + h = H_0, \quad (14.17)$$

поскольку рассматривается газ без учета вязкости и теплопроводности. Однако интеграл изэнтропичности здесь уже не имеет места, так как энтропия изменяется вдоль линии тока. Вместо условия постоянства энтропии используем уравнение притока тепла и выражение для внутренней энергии среды

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + e_v(T_v). \quad (14.18)$$

Напомним, что здесь отношение теплоемкостей γ относится только к активным степеням свободы молекул, т.е. к первой подсистеме.

Запишем соответствующие уравнения в дифференциалах, при этом уравнения (14.5) и (14.7) остаются без изменения:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} &= 0, \quad v dv + \frac{dp}{\rho} = 0, \quad de - \frac{p}{\rho^2} d\rho = 0, \\ de &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dp}{\rho} - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho^2} d\rho + \dot{e}_v dT_v. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Исключим e из последних двух уравнений системы (14.19). Получим

$$dp - a_f^2 d\rho + \dot{e}_v \rho (\gamma - 1) dT_v = 0. \quad (14.20)$$

Здесь $a_f^2 = \gamma p / \rho$ — скорость звука, связанная с отношением теплоемкостей только активных степеней свободы, т.е. *замороженная скорость звука*. При ее вычислении по уравнению состояния среды $p = p(\rho, s, e_v)$ второй и третий аргументы нужно считать постоянными (замороженными).

Как и ранее, исключим теперь dp и $d\rho$ из первых двух уравнений (14.19) и уравнения (14.20). Получим уравнение обращения воздействия, аналогичное (14.10),

$$\frac{dv}{v} (M_f^2 - 1) = \frac{dS}{S} + \frac{\dot{e}_v (\gamma - 1)}{a_f^2} dT_v. \quad (14.21)$$

Теперь не только изменение площади поперечного сечения трубки тока S определяет ускорение потока. Определим знак последнего слагаемого. При расширении и ускорении потока происходит переход внутренней энергии газа в кинетическую. При этом температуры двух подсистем T и T_v должны уменьшаться. Так как $\dot{e}_v > 0$, $\gamma > 1$, то последнее слагаемое меньше нуля. Отсюда следует, что переход через замороженную скорость звука ($M_f = 1$) происходит в расширяющемся участке трубки тока ($dS > 0$). В минимальном сечении при $dv > 0$ имеем $M_f < 1$.

Течение через простое сопло

Вернемся к модели совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Рассмотрим истечение газа из сосуда через сужающийся канал (насадок). Пусть минимальное сечение соответствует выходному сечению насадка. Такое устройство иногда называют *простым соплом*.

Пусть параметры газа в сосуде известны. Их называют *параметрами торможения*. Пусть p' — давление на срезе сопла, p_1 — давление в окружающей среде (противодавление). Рассмотрим изменение режима истечения при уменьшении p_1 .

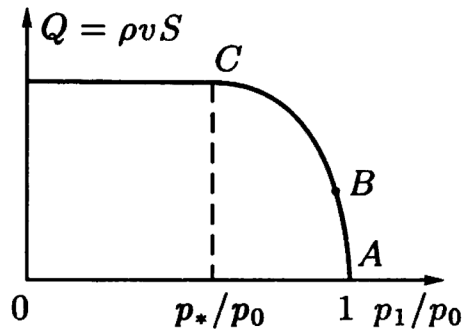


Рис. 14.2. Зависимость расхода от противодавления при запуске сопла Лавала

1. При $p_1 = p_0$ истечения нет и расход газа $Q = 0$ (точка A на рис. 14.2).

2. При уменьшении p_1 начнется течение газа. В сужающемся канале происходит разгон дозвукового потока, так что наибольшая скорость в канале соответствует выходному сечению. Опыт показывает, что при этом $p' = p_1$. Расход газа увеличивается, как показано на графике (точка B на рис. 14.2).

3. При дальнейшем уменьшении p_1 на срезе простого сопла реализуется скорость звука, а остальные параметры принимают критические значения. При этом расход газа достигает максимальной величины, даваемой формулой (14.12). Из предыдущих формул следует, что такой режим устанавливается при значении противодавления

$$p_1 = p' = p_* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} p_0. \quad (14.22)$$

Для воздуха $\gamma = 1.4$ и $p_*/p_0 = 0.528$.

4. Дальнейшее уменьшение противодавления не приводит к изменению параметров в выходном сечении простого сопла, и, следовательно, расход остается постоянным. Увеличение скорости соответствовало бы появлению в сужающемся участке такого отрезка, на котором происходило бы увеличение скорости сверхзвукового потока, а это невозможно в силу предыдущих результатов.

Таким образом, уменьшение противодавления не приводит к увеличению расхода, и течение в сопле остается фиксирован-

ным. Причина невозможности проникновения отрицательных возмущений давления состоит в том, что эти возмущения сносятся потоком. Вне сопла поток при этом, естественно, перестроится. Равенство $p' = p_1$ уже не имеет места: происходит достаточно сложное течение в сверхзвуковой свободной струе.

Течение через сопло Лавала с уменьшением противодавления: расчетный и нерасчетный режимы

Из предыдущего следует, что все параметры вдоль оси сопла Лавала можно представить в виде однозначной функции, например числа Маха (в том числе и площадь поперечного сечения сопла). Параметры, построенные в зависимости от $S/S_{\min}$, очевидно, будут иметь две ветви — дозвуковую и сверхзвуковую.

Рассмотрим истечение из сопла Лавала при уменьшении противодавления. Считаем, что параметры торможения и форма сопла фиксированы.

Рассмотрим вначале так называемый *расчетный* режим истечения, когда давление на выходном срезе сопла p' равно противодавлению p_1 .

1. При $p_1 = p_0$ течения через сопло Лавала нет и расход газа $Q = 0$.

2. При уменьшении p_1 устанавливается дозвуковое течение в сопле, причем в сужающейся части сопла поток ускоряется, а в расширяющейся части тормозится.

3. При некотором значении противодавления в минимальном сечении сопла устанавливается местная скорость звука, а давление становится равным p_* . При этом возможны два режима течения в расширяющейся части: дозвуковое течение, если $p'_1 > p_*$, и сверхзвуковое течение, если $p'_2 < p_*$. В диапазоне давлений на выходном срезе сопла $p'_2 < p' < p'_1$ расчетное истечение из сопла Лавала невозможно.

4. При дальнейшем понижении противодавления p_1 течение в сопле Лавала не изменяется, т. е. никак не реагирует на изменение противодавления. Это снова связано с наличием сверхзвуковой области потока.

В последнем случае истечение из сопла называется *нерасчетным*. Если $p' < p_1$, то сопло называется *перерасширенным*, если $p' > p_1$, сопло называется *недорасширенным*. В первом случае за выходным сечением сопла происходит торможение потока (с появлением ударных волн), во втором случае там же имеет место дополнительный разгон с понижением давления в сверхзвуковой струе.

Лекция 15

НЕРАВНОВЕСНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ. МЕТОД МГНОВЕННОГО ЗАМОРАЖИВАНИЯ

Общие свойства потока релаксирующего газа при расширении в сопле Лавалья. Замороженное и равновесное течения. Простые решения. Характерные времена процессов. Приближенный метод расчета течения в сопле: метод мгновенного замораживания.

Соплом Лавалья называется устройство для получения потоков газа большой скорости. Как следует из одномерной теории, сопло имеет вид канала переменного сечения, который вначале сужается, а затем расширяется. На выходе из канала при выполнении определенных условий образуется поступательный поток газа большой сверхзвуковой скорости.

Общие свойства релаксирующего потока при расширении в сопле Лавалья

Образование потока большой скорости достигается за счет преобразования внутренней энергии газа на входе в канал в кинетическую энергию направленного движения. Для современных летательных аппаратов требуются очень большие значения силы тяги. Поэтому сопловые устройства таких аппаратов должны обеспечить потоки очень большой скорости. Как правило, газовая среда на входе в сопло нагрета до высокой температуры.

Отсюда следует, что в течениях в соплах должны проявляться эффекты реального газа. Расчет течений не может обойтись лишь простейшей моделью совершенного газа, так как это приведет к большим ошибкам в определении величины тяги и других свойств газового потока.

Общая тенденция проявления свойств реального газа в течениях в соплах состоит в следующем. На входе в канал в высокотемпературном газе внутренняя энергия распределена равномерно по различным степеням свободы молекул газовой смеси — как активным, так и инертным. По мере продвижения в сопле газовая частица приобретает кинетическую энергию прежде всего за счет внутренней энергии активных степеней свободы. В процессе движения энергия инертных степеней свободы посредством

столкновений между молекулами передается активным степеням свободы, а затем также реализуется в виде кинетической энергии направленного движения.

В начальной фазе движения, т. е. в дозвуковой части сопла, эта передача от инертных к активным модам (степеням свободы) происходит интенсивно, так как давление еще достаточно высоко и столкновения часты. По мере ускорения потока время передачи энергии увеличивается, так как столкновения становятся все более редкими. Может возникнуть ситуация, когда передача энергии почти совсем прекратится, и дальнейшее ускорение потока будет происходить только за счет активных мод. Тогда начиная с некоторого сечения в сопле образуется газовая среда в инверсном состоянии, когда энергия инертных степеней свободы соответствует достаточно высокой температуре, и эта энергия больше не уменьшается. На использовании инверсных значений колебательной энергии молекул основан принцип действия газодинамических лазеров. В соплах двигателей летательных аппаратов эта ситуация приводит к неполной реализации внутренней энергии газа и к заниженным значениям тяги. Поэтому правильный учет явлений релаксации в каналах двигателей совершенно необходим для надежного проектирования летательных аппаратов.

Уравнение релаксации. Замороженное и равновесное течения. Простые решения

Ниже математические особенности течения газа с релаксацией будут рассмотрены на примере модели совершенного двухатомного газа с релаксацией колебательной энергии. Вначале рассмотрим особенности решений уравнения релаксации общего вида в потоке газа с увеличением скорости.

Релаксация состояния среды заключается в изменении некоторого параметра со скоростью, пропорциональной величине его отклонения от равновесного значения. Уравнение выглядит так:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_e(\rho, T) - q}{\tau(\rho, T)}. \quad (15.1)$$

Здесь q — параметр состояния, ρ , T — термодинамические переменные, $q_e(\rho, T)$ — равновесное значение параметра q , $\tau(\rho, T)$ — время релаксации. Легко убедиться, что рассмотренные ранее процессы релаксации колебательных степеней свободы двухатомных молекул или неравновесные химические реакции описываются уравнениями типа (15.1).

Рассмотрим свойства решений уравнения (15.1) при различных предположениях о входящих в него функциях. Цель этого рассмотрения — первоначальное знакомство с возможным поведением неравновесного течения в сопле Лавала.

В качестве начального условия выбирается равновесное значение q_e в ресивере перед входом в сопло. Принимается, что характерное изменение ρ и T состоит в уменьшении этих величин по мере разгона потока. Далее, для выяснения характера изменения величины q распределения ρ и T вдоль сопла будем считать известными. Поток считается одномерным и стационарным, так что $d/dt = u d/dx$.

1. Пусть $q_e = \text{const}$, $\tau = \text{const}$. Решение уравнения (15.1) с начальным условием $q|_{t=0} = q_0$ имеет вид

$$q = q_e + (q_0 - q_e) e^{-t/\tau}. \quad (15.2)$$

При $q_0 \neq q_e$ решение имеет характер перехода к равновесию ($q = q_e$) по экспоненциальному закону. Учитывая принятое выше допущение о равновесии в ресивере, т.е. $q_0 = q_e$, получим $q = q_e = \text{const}$. В этом случае начальное состояние равновесия не нарушается вдоль всего сопла. Причина состоит в том, что согласно первому допущению ($q_e = \text{const}$) уменьшение ρ и T вдоль сопла не влияет на равновесное значение параметра q , и тогда всюду в сопле начальное равновесное состояние не нарушается даже при ненулевом времени релаксации.

2. Второй, более реальный случай: $q_e = q_e(t)$ — известная функция, $\tau = \text{const}$. Решение уравнения (15.1) с начальным условием $q|_{t=0} = q_0$ имеет вид

$$q = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{\xi/\tau} q_e(\xi) d\xi + q_0 e^{-t/\tau}. \quad (15.3)$$

Интегрируя по частям $n + 1$ раз, представим его в следующем виде:

$$q = \sum_{i=0}^n (-1)^i \tau^i q_e^{(i)}(t) - \left[\sum_{i=0}^n (-1)^i \tau^i q_e^{(i)}(0) \right] e^{-t/\tau} + \\ + (-1)^{n+1} \tau^{n+1} e^{-t/\tau} \int_0^t e^{\xi/\tau} q_e^{(n+1)}(\xi) d\xi + q_0 e^{-t/\tau}. \quad (15.4)$$

Здесь $q_e^{(n)}(t)$ — n -я производная функции $q_e(t)$. Если в ресивере имеет место равновесие, т. е. $q_0 = q_e(0)$, то решение несколько упрощается. Для большей наглядности запишем его в частном случае $n = 2$:

$$q = q_e(t) - \tau q_e'(t) + \tau^2 q_e''(t) - [-\tau q_e'(0) + \tau^2 q_e''(0)] e^{-t/\tau} - \tau^2 e^{-t/\tau} \int_0^t e^{\xi/\tau} q_e^{(3)}(\xi) d\xi. \quad (15.5)$$

Пусть функция $q_e(t)$ такова, что ее третья производная (в общем случае $(n+1)$ -я производная) мала и достаточно быстро затухает с ростом t . Тогда интеграл в последнем слагаемом (15.5) (и (15.4)) сходится при $t \rightarrow \infty$ и два последних слагаемых уменьшаются по экспоненциальному закону. В этом случае отклонение решения от равновесия определяется первой группой слагаемых. Запишем (15.5) следующим образом:

$$q = q_e(t) \left[1 - \tau \frac{q_e'(t)}{q_e(t)} + \tau^2 \frac{q_e''(t)}{q_e(t)} \right] + A(t) e^{-t/\tau}, \quad (15.6)$$

где $A(t)$ — ограниченная функция. Видно, что причиной отклонения от равновесия в сопле служит переменность функции $q_e(t)$, т. е. отличие от нуля ее производных.

Введем новое обозначение

$$\tau_{\text{var}} = \left| \frac{q_e'(t)}{q_e(t)} \right|^{-1}. \quad (15.7)$$

Величина τ_{var} имеет смысл характерного времени изменения величины q_e вдоль сопла. Из формулы (15.6) видно, что с ростом времени относительное отклонение $q(t)$ от равновесного значения $q_e(t)$ при ограниченных τ (например, $\tau < 1$) характеризуется прежде всего слагаемым τ/τ_{var} (второе слагаемое в квадратных скобках в формуле (15.6)). При $\tau_{\text{var}} \rightarrow \infty$ имеем $q_e'(t) \rightarrow 0$, $q_e \rightarrow \text{const}$, и мы получаем первый случай, когда отклонение от равновесия не происходит ни при каких значениях τ .

Три характерных времени для течения в сопле

Наряду с уже рассмотренными характерными временами введем еще характерное время течения

$$\tau_f = \frac{l}{u_*},$$

где l — характерный размер сопла, u_* — характерное значение скорости газа в нем, например критическая скорость звука.

Итак, неравновесное течение в сопле определяется тремя характерными временами: время релаксации τ ; время течения τ_f ; время изменения τ_{var} .

Хотя последняя величина согласно (15.7) переменна вдоль сопла, можно рассмотреть ее некоторые постоянные значения, характерные либо для всего сопла в целом, либо для его отдельных участков. И наоборот, все три характерных времени можно считать переменными вдоль сопла. О времени релаксации τ это отмечено в уравнении (15.1). Для τ_f следует выбрать локальную скорость и радиус сопла в данном сечении.

Будем пока считать времена τ , τ_f , τ_{var} постоянными в сопле в целом и рассмотрим разные режимы течения при относительных величинах этих времен. Для этого в уравнении (15.1) при $\tau = \text{const}$ перейдем к безразмерным переменным:

$$q' = \frac{q}{q^*}, \quad q'_e = \frac{q_e}{q^*}, \quad t' = \frac{t}{\tau_f},$$

и затем опустим штрихи. Здесь q^* — некоторое характерное значение параметра q . Уравнение принимает вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_e(t) - q}{\tau/\tau_f}. \quad (15.8)$$

Здесь q и t — безразмерные величины.

Для определения режимов течения будем рассматривать уравнение (15.8) и решение (15.6), (15.7).

1. При $\tau/\tau_f \gg 1$ из (15.8) получим $dq/dt \approx 0$, $q \approx \text{const}$. Течение называется *почти замороженным*.

2. При $\tau/\tau_f \ll 1$ из (15.8) получим $q \approx q_e(t)$. Течение называется *почти равновесным*.

3. При $\tau/\tau_{\text{var}} \ll 1$ из (15.6), (15.7) получим $q \approx q_e(t)$. Течение называется *почти равновесным*.

4. Наконец, при $\tau \sim \tau_f \sim \tau_{\text{var}}$ течение называется *неравновесным*.

Окончательно, объединяя (2) и (3), получим следующие условия для реализации предельных потоков в сопле:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\tau_f} \gg 1 & \text{ — почти замороженное течение,} \\ \min \left[\frac{\tau}{\tau_f}, \frac{\tau}{\tau_{\text{var}}} \right] \ll 1 & \text{ — почти равновесное течение.} \end{aligned} \quad (15.9)$$

Рассмотрим теперь более детально характерные режимы течения в сопле, двигаясь постепенно от входного участка до выходного сечения. Будем считать, что течение в сопле не содержит ударных волн и других участков резкого изменения параметров газа. Относительно параметров τ , τ_f , τ_{var} не будем делать каких-либо априорных предположений.

Разделим все сопло на три секции: входную, промежуточную и выходную. Напомним, что к входной секции примыкает ресивер, содержащий покоящуюся высокотемпературную равновесную газовую смесь, а из выходной секции происходит истечение газовой струи, как правило, в вакуум или в затопленное, т. е. заполненное газом пространство с низким давлением.

Во входной секции течение относительно медленное, происходит постепенное увеличение скорости. Все параметры газовой смеси изменяются плавно, оставаясь сравнительно близкими к параметрам торможения. Поскольку изменения всех параметров невелики, можно для входной секции принять условие

$$\frac{\tau}{\tau_{var}} \ll 1.$$

Поэтому течение здесь почти равновесное.

При переходе в промежуточную секцию скорость газа увеличивается, а давление падает. Это приводит к росту времени релаксации τ из-за уменьшения числа столкновений молекул и атомов в единицу времени. В этой же секции происходит переход через скорость звука. Изменения параметров убыстряются, так что τ_{var} уменьшается. Поэтому для промежуточной секции естественно принять

$$\tau \sim \tau_f \sim \tau_{var},$$

т. е. имеем типичный случай неравновесного течения.

В выходной секции сопла газовая смесь, как правило, достигает высокой степени разреженности. Температура, плотность и давление падают, а скорость в выходном сечении наибольшая. Поэтому локальные значения характерного времени течения τ_f невелики, а время релаксации сильно увеличивается из-за разреженности потока. Течение продолжает развиваться в канале переменного сечения, поэтому здесь по-прежнему

$$\tau_f \sim \tau_{var}.$$

В выходной секции справедливо неравенство

$$\frac{\tau}{\tau_f} \gg 1,$$

т. е. реализуется почти замороженное течение. Значения релаксационных параметров типа функции q «замораживаются» на уровне, достигнутом где-то в переходной области между промежуточной и выходной секциями.

Метод мгновенного замораживания

Описанный выше качественный характер течения в сопле с релаксацией позволил сформулировать приближенный метод мгновенного замораживания для расчета течения. Метод был опубликован в конце 50-х годов; русский перевод вышел из печати в 1962 г. [3].

Основная идея метода состоит в замене реального течения в сопле предельным течением, состоящим только из входной и выходной секций. Иначе говоря, предполагается, что длина промежуточной секции пренебрежимо мала, а течение как бы скачком переходит от почти равновесного (входная секция) к почти замороженному (выходная секция).

Напомним, что во входной секции $\tau/\tau_{\text{var}} \ll 1$, а в выходной секции $\tau/\tau_f \gg 1$, $\tau_{\text{var}} \sim \tau_f$, т. е. $\tau/\tau_{\text{var}} \gg 1$. Считая изменение переменных характерных времен вдоль сопла непрерывным, определим положение бесконечно узкой промежуточной секции из условия $\tau = \tau_{\text{var}}$:

$$\left| \frac{1}{q_e(t)} \frac{dq_e}{dt} \right| = \frac{1}{\tau(\rho_e, T_e)}. \quad (15.10)$$

Во входной секции сопла, т. е. выше по потоку от сечения, определяемого условием (15.10), течение считается полностью равновесным (релаксация отсутствует). В самом сечении (15.10) происходит мгновенное замораживание потока, и в выходной секции ниже по потоку все релаксационные параметры остаются постоянными и равными своим значениям в сечении (15.10). Иначе говоря, течение в выходной секции полностью заморожено.

Легко видеть, что изложенный здесь метод существенно упрощает расчет неравновесного течения в сопле Лавала, поскольку исключает необходимость решения уравнений релаксации типа (15.1). Параметры релаксации используются лишь для определения положения сечения мгновенного замораживания из условия (15.10) и для определения всех параметров газа в этом сечении.

Пример расчета течения в сопле методом мгновенного замораживания показан на рис. 15.1 и рис. 15.2. Расчет проведен для случая течения идеально диссоциирующего газа. По оси абсцисс

на двух рисунках отложена относительная площадь поперечного сечения сопла. Сплошные линии показывают точное численное решение, штриховые линии — решение методом мгновенного замораживания. На рис. 15.1 показано распределение концентрации атомов α , на рис. 15.2 — распределение температуры газа.

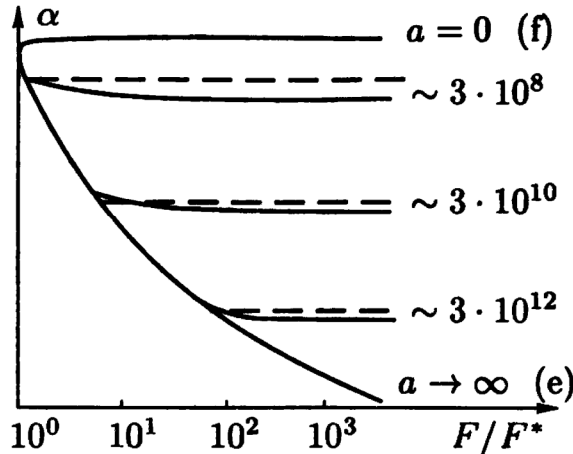


Рис. 15.1. Распределение концентрации атомов α вдоль сопла

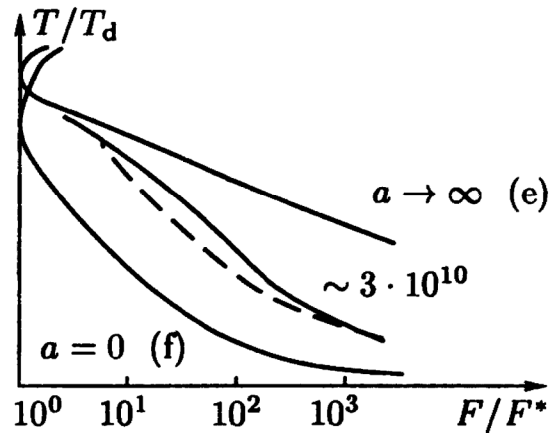


Рис. 15.2. Распределение температуры T вдоль сопла

Использовано обозначение $a = \tau_{\text{var}}/\tau$. Буквами е и f обозначены равновесное и замороженное течения соответственно. Видно, что для двух основных параметров газового потока приближенный метод хорошо согласуется с численным решением.

Лекция 16

ДВУМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Плоские и осесимметричные стационарные течения. Функция тока. Естественная система координат. Физический смысл функции тока. Теорема Крокко о вихрях. Образование завихренности в потоке сжимаемого газа за счет ударных волн переменной интенсивности. Потенциальные течения, уравнение для потенциала. Переменные годографа. Уравнение Чаплыгина.

Значительное упрощение задач о движении сжимаемого газа достигается за счет уменьшения числа независимых переменных. Мы уже рассматривали одномерные стационарные и одномерные нестационарные течения, причем в ряде случаев получали решения задач в явном виде. Теперь рассмотрим класс двумерных стационарных течений.

Двумерные стационарные течения: плоские и осесимметричные

Пусть движение не зависит от времени t . В общем случае остаются три пространственные независимые переменные. Дальнейшее упрощение достигается для класса течений, зависящих только от двух независимых переменных. Здесь имеется два типа течений.

Плоское течение. Пусть движение зависит только от двух переменных x, y , а в любой плоскости $z = \text{const}$ параметры течения одинаковы. Тогда можно положить $v_z \equiv 0$ (путем соответствующего выбора системы координат), и система уравнений адиабатического движения совершенного газа принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (16.1) \\ u \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial x} + v \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Осесимметричное течение. Запишем уравнения стационарного адиабатического движения газа в цилиндрических координатах (y, φ, x) и будем считать, что течение не зависит от окружной координаты φ . Если дополнительно положить $v_\varphi \equiv 0$, получим осесимметричное течение с осью Ox . Уравнения совпадают с (16.1) за исключением уравнения неразрывности, которое теперь имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v y)}{\partial y} = 0. \quad (16.2)$$

Удобно записать оба случая в единой форме:

$$\frac{\partial(\rho u y^{\nu-1})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v y^{\nu-1})}{\partial y} = 0, \quad (16.3)$$

где $\nu = 1, 2$ для плоского и осесимметричного течений соответственно.

Уравнение (16.3) позволяет для рассматриваемого класса течений ввести *функцию тока* ψ

$$\rho u y^{\nu-1} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v y^{\nu-1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (16.4)$$

Приведем уравнения двумерного стационарного течения к естественной системе координат, в которой в качестве координатных линий принимаются линии тока и нормали к ним. В этих переменных функция тока ψ получает естественное истолкование: $d\psi$ представляет собой расход массы газа через прямоугольное поперечное сечение трубки тока, имеющей единичную ширину (единица длины в плоском случае и один радиан в осесимметричном) и ограниченной линиями ψ и $\psi + d\psi$.

Замена переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial n}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial s} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial n}, \\ u &= w \cos \theta, & v &= w \sin \theta. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Здесь w, θ — модуль скорости газа и ее угол с осью Ox соответственно. Подставляя (16.5) в уравнения (16.1) и (16.3), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho w} \frac{\partial(\rho w)}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{1}{y^{\nu-1}} \frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial s} &= 0, & w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} &= 0, \\ w^2 \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, & w \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Из третьего уравнения (16.6), в частности, видно, что на прямолинейном участке линии тока ($\partial\theta/\partial s = 0$) имеем $\partial p/\partial n = 0$.

Запишем производные от функции тока ψ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial\psi}{\partial s} - \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial n} = -\rho y^{\nu-1} w \sin\theta, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial s} + \cos\theta \frac{\partial\psi}{\partial n} = \rho y^{\nu-1} w \cos\theta.\end{aligned}\tag{16.7}$$

Из (16.7) находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \rho w y^{\nu-1},\tag{16.8}$$

откуда вытекает сделанное выше утверждение о физическом смысле функции тока ψ . Кроме того, из первой формулы (16.8) следует, что функции тока ψ постоянна на линиях тока.

Напомним, что в адиабатических стационарных течениях невязкого газа энтропия s и константа Бернулли H_0 (полная энтальпия) остаются постоянными вдоль линии тока. Таким образом, эти величины в потоке газа можно считать однозначными функциями от функции тока ψ , которая в силу свойства (16.8) монотонно изменяется при переходе от одной линии тока к другой. Имеем $s = s(\psi)$, $H_0 = H_0(\psi)$.

Теорема Крокко о вихрях

Остановимся на одном важном свойстве стационарных течений сжимаемого газа. Его можно рассмотреть в произвольном трехмерном случае; разумеется, оно будет справедливо и в рассматриваемых здесь двумерных течениях.

Мы уже видели ранее, что уравнение стационарного течения газа

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0\tag{16.9}$$

можно записать с помощью формулы

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2\tag{16.10}$$

с использованием вектора вихря $\text{rot } \mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{2} \text{grad } v^2.\tag{16.11}$$

Напомним, что уравнение состояния газа во всем поле течения записывается в виде

$$s = s(\rho, e). \quad (16.12)$$

Входящие в него функции можно рассматривать как непрерывные (или разрывные) функции координат. Вычислим из (16.12) величину $\text{grad } s$:

$$\text{grad } s = \left. \frac{\partial s}{\partial \rho} \right|_e \text{grad } \rho + \left. \frac{\partial s}{\partial e} \right|_\rho \text{grad } e = -\frac{p}{\rho^2 T} \text{grad } \rho + \frac{1}{T} \text{grad } e, \quad (16.13)$$

$$T \text{grad } s = p \text{grad } \frac{1}{\rho} + \text{grad } e = \text{grad } h - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Исключая из (16.11) слагаемое $(1/\rho) \text{grad } p$ с помощью второй формулы (16.13), получим

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \text{grad} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) - T \text{grad } s = \text{grad } H_0 - T \text{grad } s. \quad (16.14)$$

Таким образом, завихренность течения определяется переменностью в потоке константы Бернулли H_0 и энтропии s .

Применим формулу (16.14) к случаю (плоских и осесимметричных) двумерных стационарных адиабатических течений. Векторное уравнение (16.14) имеет две компоненты:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = k\omega, \quad (16.15)$$

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = \mathbf{i}v\omega - \mathbf{j}u\omega;$$

имеем

$$v\omega = \frac{\partial H_0}{\partial x} - T \frac{\partial s}{\partial x}, \quad -u\omega = \frac{\partial H_0}{\partial y} - T \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (16.16)$$

Поскольку H_0 и s можно считать функциями только ψ , получим

$$v\omega = \frac{dH_0}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - T \frac{ds}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad -u\omega = \frac{dH_0}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} - T \frac{ds}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (16.17)$$

Подставим (16.4) в (16.17) и получим

$$\omega = -\rho y^{\nu-1} \left(\frac{dH_0}{d\psi} - T \frac{ds}{d\psi} \right). \quad (16.18)$$

В двумерном течении завихренность потока ω определяется изменением H_0 и s от одной линии тока к другой.

Таким образом, если двумерное течение начинается из однородного и всюду непрерывно, то оно является безвихревым ($\omega = 0$).

Важной причиной образования завихренности в течениях газа служат ударные волны. Мы уже видели, что энтропия на ударной волне терпит разрыв. Легко себе представить, что величина скачка энтропии зависит от интенсивности ударной волны (для слабых волн мы имели явную формулу). Далее, интенсивность ударной волны зависит от угла между скоростью набегающего потока и ударной волной α (ниже мы точно установим этот факт; до сих пор рассматривался только случай $\alpha = 90^\circ$).

Таким образом, если в однородном потоке имеется криволинейная ударная волна, то за ней энтропия изменяется от одной линии тока к другой (а величина H_0 на ударной волне непрерывна), т. е. поток за такой ударной волной является завихренным.

Потенциал скорости; уравнение для потенциала скорости в сжимаемом газе

Рассмотрим плоское ($\nu = 1$) потенциальное течение. Будем считать, что течение также является изэнтропическим, т. е. энтропия во всем потоке постоянна. Такому случаю соответствует течение из однородного потока при отсутствии ударных волн либо со слабыми ударными волнами.

Введем потенциал скорости

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (16.19)$$

и получим уравнение для φ . Для этого исключим плотность из уравнений неразрывности и движения; в последних положим $\text{grad } p = a^2 \text{grad } \rho$, так как движение изэнтропическое:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}, \\ \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Подставим (16.20) в уравнение неразрывности:

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (16.21)$$

$$-\frac{u}{a^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{v}{a^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{uv}{a^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (16.22)$$

Подставим в (16.22) определение (16.19) и получим

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2} \right) \varphi_{xx} + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2} \right) \varphi_{yy} - \frac{2\varphi_x \varphi_y}{a^2} \varphi_{xy} = 0. \quad (16.23)$$

Нужно еще связать a^2 со скоростью. Это можно сделать с помощью уравнения Бернулли. Выпишем его для модели совершенного газа:

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2, \quad u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y. \quad (16.24)$$

Исключая a^2 из (16.23), (16.24), получим одно нелинейное уравнение для потенциала скорости φ .

В дальнейшем мы будем неоднократно возвращаться к уравнению (16.23).

Подчеркнем, что уравнение для потенциала φ является существенно нелинейным. В недавнем прошлом это служило серьезным препятствием для эффективного решения задач газовой динамики. С развитием численных методов эта трудность утратила свое решающее значение, однако для качественного исследования новых задач по-прежнему предпочтительнее иметь дело с линейными уравнениями.

По мере развития газовой динамики четко обрисовались два пути эффективного решения двумерных задач газовой динамики для потенциальных течений:

- 1) линеаризация уравнения для потенциала;
- 2) переход к переменным годографа.

Если первое направление в газовой динамике связывают обычно с немецкой школой гидроаэродинамиков (Л. Прандтль, Г. Глауэрт, Дж. Аккерет), то основоположником второго направления по праву считается великий русский ученый академик С.А. Чаплыгин. Его классическая работа «О газовых струях» (1902 г.) считается источником всей современной газовой динамики [25].

Переменные годографа. Уравнение Чаплыгина

Оказывается, что в переменных годографа плоское потенциальное движение газа описывается линейным уравнением. Под переменными годографа обычно понимают переменные, связанные так или иначе со скоростью движения газа. Это могут быть либо компоненты u , v , либо модуль и угол скорости w , θ , либо их некоторые комбинации. Ниже приводится уравнение для описания плоского потенциального движения газа, известное в литературе как уравнение С.А. Чаплыгина.

Введем новую переменную

$$\Phi = -\varphi + xu + yv. \quad (16.25)$$

Здесь $\varphi = \varphi(x, y)$ — потенциал скорости. Его полный дифференциал запишется так:

$$d\varphi = u dx + v dy = d(ux) - x du + d(vy) - y dv, \quad (16.26)$$

$$d\Phi = d(-\varphi + ux + vy) = x du + y dv.$$

Переход от независимых переменных x , y к переменным u , v совершается с помощью преобразования Лежандра, даваемого функцией (16.25) $\Phi = \Phi(u, v)$ и формулами

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad (16.27)$$

вытекающими из второй формулы (16.26).

Удобнее от переменных u , v перейти к переменным w , θ . Получим из (16.27)

$$x = \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial w} - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad y = \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial w} + \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (16.28)$$

Уравнения газовой динамики приводятся к одному уравнению С. А. Чаплыгина [13]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{w^2}{1 - w^2/a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} + w \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0. \quad (16.29)$$

Здесь $a = a(w)$ из уравнения Бернулли. Уравнение (16.29) широко использовалось для исследования околосвуковых течений.

Лекция 17

ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Особенности решения задач в переменных годографа. Предельная линия. Уравнение Эйлера–Трикоми. Характеристики. Уравнение для потенциала плоского почти однородного трансзвукового течения газа.

Здесь рассматриваются методы описания и некоторые свойства плоских трансзвуковых течений. Анализ проводится на основе уравнения Чаплыгина и уравнения для потенциала в декартовых координатах.

Особенности решения задач в переменных годографа

Решение задачи в переменных годографа состоит из двух этапов.

1. Определение функции $\Phi = \Phi(w, \theta)$, удовлетворяющей граничным условиям задачи.

2. Переход в физическую плоскость $(w, \theta) \Rightarrow (x, y)$.

Следовательно, для получения решения исходной задачи нужно не только найти единственное решение $\Phi(w, \theta)$, но и осуществить однозначный переход в физическую плоскость (x, y) . Необходимым условием такого перехода является следующее требование: якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, w)} \quad (17.1)$$

не должен менять знак, проходя через нуль.

Введем определение: линия $w = w(\theta)$ (или $y = y(x)$), в каждой точке которой $\Delta = 0$, называется *предельной линией*.

Покажем, что если при прохождении предельной линии определитель Δ меняет знак, то решение в плоскости (x, y) становится комплексным.

Пусть $\Delta = 0$ на линии $w = w_0(\theta)$, а производная $\left. \partial y / \partial \theta \right|_w \neq 0$, т. е. поток в направлении y в этом месте переменный. Тогда

имеет место

$$-\Delta \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_w = \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, \theta)} \frac{\partial(w, \theta)}{\partial(w, y)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, y)} = \frac{\partial x}{\partial w} \Big|_y = 0, \quad (17.2)$$

так как $\Delta = 0$. Следовательно, функцию $x = x(w, y)$, которая получится из $x = x(w, \theta)$, $y = y(w, \theta)$ путем исключения θ , в окрестности линии $w = w_0(\theta)$ при $y = \text{const}$ можно представить так:

$$x - x_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} \Big|_y (w - w_0)^2, \quad (17.3)$$

где вторая производная определяется, очевидно, на самой линии. Она отлична от нуля, когда якобиан и вместе с ним производная от x в (17.2) изменяют свой знак при пересечении предельной линии. Из (17.3) видно, что по одну сторону от линии $w = w_0(\theta)$ функция $w = w(x)$ при $y = \text{const}$ будет комплексной.

Формула для Δ получится, если производные подставить из формул замены переменных (16.28). После достаточно громоздких вычислений получим

$$\Delta = \frac{1}{w} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial w} - \frac{1}{w} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{w^2}{1 - w^2/a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} \right)^2 \right]. \quad (17.4)$$

Отсюда видно, что в дозвуковом потоке ($w \leq a$) всегда $\Delta > 0$. Предельные линии возможны только в сверхзвуковом потоке. Появление предельной линии означает, что в данном месте невозможно непрерывное течение. В потоке должны возникнуть ударные волны. Отметим, что в общем случае положение предельной линии не совпадает с положением ударной волны.

Остановимся на одном важном факте, вытекающем из условия положительности якобиана в дозвуковом потоке. Имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\partial(\theta, w)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\theta, w)}{\partial(x, w)} \frac{\partial(x, w)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_w \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_x. \quad (17.5)$$

При $w \leq a$ всегда $\Delta > 0$, т. е. производные $\partial \theta / \partial x \Big|_w$ и $\partial w / \partial y \Big|_x$ имеют одинаковые знаки. Иначе говоря, если мы будем в физической плоскости двигаться вдоль линии $w = w_0 = \text{const}$ так, что область $w < w_0$ остается справа от линии, то вектор скорости будет монотонно поворачиваться против часовой стрелки, так как угол θ должен монотонно возрастать.

Этот результат принадлежит А. А. Никольскому и Г. И. Таганову. Он используется иногда при анализе трансзвуковых

течений, так как остается справедливым и на звуковой линии — линии перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому, на которой $w = a_*$ (критическая скорость).

Уравнение Эйлера–Трикоми — трансзвуковой аналог уравнения Чаплыгина

Стационарные течения, в которых происходит переход из дозвуковой области в сверхзвуковую (и обратно), называются *смешанными* или *трансзвуковыми* течениями.

Как мы уже знаем, в сверхзвуковой области течения могут появляться ударные волны. Однако из проделанного ранее анализа общих свойств ударных волн следует, что при скорости газа перед ударной волной, близкой к местной скорости звука, интенсивность ударной волны слабая, и течение за такими ударными волнами по-прежнему можно считать потенциальным.

Поэтому для анализа трансзвукового течения удобно пользоваться уравнением Чаплыгина после соответствующих упрощений. Проведем эти упрощения при условии, что в рассматриваемой области течения имеет место $w \approx a \approx a_*$. Упростим уравнение Бернулли:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{w^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2, \quad \frac{a^2 - w^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (a_*^2 - w^2). \quad (17.6)$$

Считая $a - w$ и $a_* - w$ малыми одного порядка, пренебрегая их произведением и квадратами, получим

$$\frac{w}{a} - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{w}{a_*} - 1 \right). \quad (17.7)$$

Коэффициент в уравнении Чаплыгина для функции Φ принимает вид

$$\frac{w^2}{1 - w^2/a^2} \approx \frac{a_*^2}{2(1 - w/a)} = \frac{a_*^2}{(\gamma + 1)(1 - w/a_*)}. \quad (17.8)$$

Подставим (17.8) в уравнение Чаплыгина. При малых отклонениях w от a_* и при значениях угла $\theta \approx (w/a_* - 1)^{3/2}$ следует пренебречь слагаемым с первой производной $\partial\Phi/\partial\theta$. В результате получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{a_*^2}{(\gamma + 1)(1 - w/a_*)} \frac{\partial^2\Phi}{\partial w^2} = 0. \quad (17.9)$$

Замена переменной

$$\eta = (\gamma + 1)^{1/3} \frac{w - a_*}{a_*}, \quad 1 - \frac{w}{a_*} = -\frac{\eta}{(\gamma + 1)^{1/3}} \quad (17.10)$$

приводит уравнение (17.9) к уравнению Эйлера–Трикоми

$$\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (17.11)$$

В полуплоскости $\eta > 0$ это уравнение гиперболического типа, а при $\eta < 0$ — эллиптического типа.

Напомним, что характеристики общего уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + \varphi(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

определяются уравнением

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0. \quad (17.12)$$

Применяя (17.12) к уравнению (17.11), получим дифференциальное уравнение для характеристик

$$\eta \eta'^2 - 1 = 0, \quad (17.13)$$

решениями которого служат полукубические параболы

$$\theta \pm \frac{2}{3} \eta^{3/2} = C. \quad (17.14)$$

Напомним, что такой вид имеют характеристики в плоскости годографа.

В прошлые десятилетия интенсивно исследовались частные решения уравнения Эйлера–Трикоми, особенно в окрестности начала координат $\eta = 0$, $\theta = 0$. Приведем пример. Если искать решение в виде

$$\Phi = \theta^{2k} f(\xi), \quad \xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2} \quad (17.15)$$

(на такой вид решения указывает однородность исходного уравнения (17.11) относительно преобразования $\theta^2 \rightarrow a\theta^2$, $\eta^3 \rightarrow a\eta^3$), то для функции $f(\xi)$ получаем гипергеометрическое уравнение

$$\xi(1 - \xi)f'' + \left[\frac{5}{6} - 2k - \xi \left(\frac{3}{2} - 2k \right) \right] f' - k \left(k - \frac{1}{2} \right) f = 0.$$

Более того, общее решение уравнения (17.11) можно выписать в виде интеграла по контуру в плоскости комплексного переменного z

$$\Phi = \int_C f(\zeta) dz, \quad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta.$$

Здесь $f(\zeta)$ — произвольная функция, C — произвольный контур, на концах которого $f'(\zeta)$ принимает одинаковые значения.

Уравнение для потенциала плоского почти однородного трансзвукового потока газа

Напомним уравнение для потенциала φ плоского течения в декартовых координатах:

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} - \left(\frac{2\varphi_x \varphi_y}{a^2}\right) \varphi_{xy} = 0. \quad (17.16)$$

Упростим это уравнение в случае трансзвукового почти однородного течения. Будем считать, что

$$u = \varphi_x \approx a \approx a_*, \quad v = \varphi_y \ll a. \quad (17.17)$$

Напомним трансзвуковой аналог уравнения Бернулли (так как $u \gg v$, то вместо модуля скорости подставим u):

$$\frac{u}{a} - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{u}{a_*} - 1 \right). \quad (17.18)$$

Тогда первый коэффициент (17.16) принимает вид

$$1 - \frac{u^2}{a^2} \approx (\gamma + 1) \left(1 - \frac{u}{a_*} \right). \quad (17.19)$$

Подставляя оценки (17.17), (17.19) в (17.16), получим

$$(\gamma + 1) \left(1 - \frac{u}{a_*} \right) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0. \quad (17.20)$$

Наконец, введем новый потенциал скоростей (потенциал возмущений относительно однородного звукового потока)

$$\varphi = a_*(x + \varphi_1), \quad (17.21)$$

$$u = \varphi_x = a_*(1 + \varphi_{1x}), \quad \varphi_{xx} = a_*\varphi_{1xx}, \quad \varphi_{yy} = a_*\varphi_{1yy}.$$

Подставляя (17.21) в (17.20), получим уравнение для потенциала трансзвукового потока

$$(\gamma + 1)\varphi_{1x}\varphi_{1xx} = \varphi_{1yy}. \quad (17.22)$$

Это уравнение служит основой для исследования многих важных особенностей перехода через скорость звука в плоском стационарном потоке газа. Как правило, решения этого уравнения находятся методом разделения переменных.

Лекция 18

СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Линии Маха и их свойства. Случаи потенциального течения. Характеристики в плоскости годографа для потенциальных течений: эпициклоиды. Течение типа простой волны. Обтекание выпуклой стенки однородным сверхзвуковым потоком. Обтекание выпуклого угла: центрированная волна разрежения.

Как уже отмечалось во вводной лекции, свойство сжимаемости газа проявляется в конечной скорости распространения малых возмущений (скорости звука) и, как следствие, в существенном изменении свойств сверхзвукового стационарного течения по сравнению с дозвуковым потоком. Изучение сверхзвуковых течений является основным предметом газовой динамики. На примере трансзвукового уравнения Эйлера–Трикоми мы уже видели, что в сверхзвуковом случае имеем уравнение гиперболического типа с действительными характеристиками. Сейчас мы покажем, что это свойство сохраняется при любой сверхзвуковой скорости.

Уравнения характеристик и «условия на характеристиках»

Существует несколько способов получения уравнений характеристик для системы, описывающей двумерное стационарное течение сжимаемого газа. Здесь для такого вывода воспользуемся уравнениями в естественных переменных, приведя их к характеристическому виду. Одновременно это позволяет выявить все характеристические направления. Напомним уравнения в естественных переменных (s, n) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho w} \frac{\partial(\rho w)}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{1}{y^{\nu-1}} \frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial s} &= 0, & w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, & w \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Последнее уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial p}{\partial s} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0. \quad (18.2)$$

Исключим $\partial w / \partial s$ и $\partial \rho / \partial s$ из первого уравнения (18.1) с помощью второго уравнения (18.1) и уравнения (18.2) соответственно. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho w} \frac{\partial(\rho w)}{\partial s} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{M^2 - 1}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial s}, \\ \frac{M^2 - 1}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{1}{y^{\nu-1}} \frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Теперь комбинация третьего уравнения (18.1) и (18.3) позволит записать исходную систему (18.1) в характеристической форме. Умножим уравнение (18.3) на $1/\sqrt{M^2 - 1}$, а третье уравнение (18.1) на ± 1 и сложим. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho w^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \pm \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{1}{y^{\nu-1}} \frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial s} = 0. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Напомним, что в силу (16.5) $\partial y / \partial s = \sin \theta$. Уравнения (18.4) имеют характеристическую форму, т.е. каждое из уравнений содержит производные лишь в одном из направлений:

$$\frac{\partial}{\partial l_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial s} \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial n}. \quad (18.5)$$

Запишем окончательно всю систему уравнений для четырех неизвестных w , θ , p , ρ в характеристической форме:

$$\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial l_{\pm}} \pm \frac{\partial \theta}{\partial l_{\pm}} + \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \frac{1}{y^{\nu-1}} \frac{\partial y^{\nu-1}}{\partial s} = 0, \quad (18.6)$$

$$w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad w \frac{\partial (p/\rho^\gamma)}{\partial s} = 0.$$

Отсюда видно, что исходные уравнения имеют три семейства характеристик: линии тока s и линии Маха $l_{\pm}$. То обстоятельство, что линии, определяемые формулами (18.5), представляют

собой линии Маха, легко показать следующим образом. Из формул (18.5) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (18.7)$$

(по определению производной по направлению), где α — угол между линией $l_{\pm}$ и линией тока s (напомним, что исходные переменные — естественные координаты s и n). Из формулы (18.7) легко получить

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \sqrt{1 + 1/(M^2 - 1)}} = \pm \frac{1}{M}, \quad (18.8)$$

т. е. угол α равен углу Маха. Изобразим взаимное расположение линий тока и линий Маха в физических переменных (рис. 18.1). Индексами C_+ и C_- обозначаются два семейства линий Маха в физической плоскости.

Заметим, что на линии перехода ($M = 1$) линии Маха ортогональны линиям тока. Легко вычислить нормальную к характеристике составляющую скорости газа. Имеем $v_n = v \sin \alpha = v/M = a$. Таким образом, нормальная составляющая всегда равна скорости звука.

Иногда в литературе характеристическую форму уравнений газовой динамики (18.6) называют условиями на характеристиках. Подчеркнем еще раз, что здесь мы имеем дело просто с другой формой исходных уравнений, полученной линейным преобразованием. В этом смысле в заголовке данного пункта использованы кавычки.

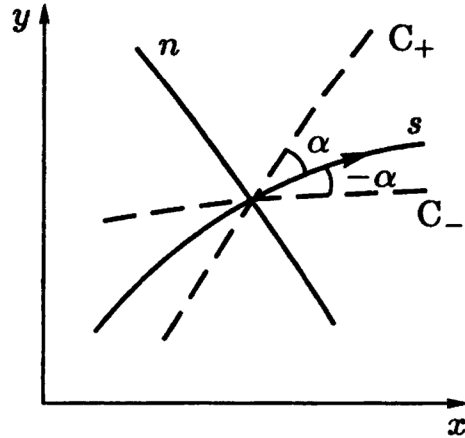


Рис. 18.1. Взаимное расположение линий Маха и линий тока

Вывод уравнений для характеристик из уравнения для потенциала

Уравнения характеристик в частном случае потенциальных течений легко получить из уравнения для потенциала, которое в плоском случае имеет вид

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} - \frac{2uv\varphi_{xy}}{a^2} = 0. \quad (18.9)$$

Применяя стандартную формулу характеристических направлений для уравнений в частных производных второго порядка, получим следующее уравнение:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) y'^2 + \frac{2uvy'}{a^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0. \quad (18.10)$$

Решая (18.10), получим его корни:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{uv \pm a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2}}{u^2 - a^2}. \quad (18.11)$$

С помощью элементарных формул тригонометрии легко установить, что кривые, определяемые дифференциальным уравнением (18.11), составляют с осью Ox углы $\theta \pm \alpha$.

Характеристики в плоскости годографа для потенциальных течений

Определим характеристические направления в плоскости годографа в частном случае потенциальных течений. Для этого обратимся к уравнению Чаплыгина

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{w^2}{1 - w^2/a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} + w \frac{\partial \Phi}{\partial w} = 0 \quad (\Phi = -\varphi + xu + yv). \quad (18.12)$$

Используя стандартную формулу, получим

$$\left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2 + \frac{w^2}{1 - w^2/a^2} = 0, \quad \frac{d\theta}{dw} = \pm \frac{1}{w} \sqrt{\frac{w^2}{a^2} - 1}. \quad (18.13)$$

Уравнения (18.13) можно проинтегрировать, если воспользоваться уравнением Бернулли для исключения скорости звука:

$$\begin{aligned} \frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2, \\ \frac{w^2}{a^2} - 1 &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{w^2 - a_*^2}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2 - w^2} = \frac{w^2 - a_*^2}{a_*^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} w^2}. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Видно, что правые части уравнений (18.13) зависят только от w . Интегрирование дает

$$J_{\pm} = \theta \pm \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \left(1 - \frac{a_*^2}{w^2}\right)} - \right.$$

$$- \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{w^2}{a_*^2} - 1 \right)} \Big\} = \text{const.} \quad (18.15)$$

Характеристики (18.15) в плоскости годографа Γ_+ и Γ_- являются отображениями характеристик C_+ и C_- в физической плоскости. Поэтому формулы (18.15) можно трактовать как комбинации искомых функций w , θ , остающиеся постоянными вдоль характеристик C_+ и C_- в физической плоскости (аналог инвариантов Римана). Разумеется, эти формулы справедливы лишь в случае потенциальных течений, для которых верно исходное уравнение (18.12). Подчеркнем, что конечные формулы (18.15) не зависят от конкретного течения, т. е. не зависят от граничных условий задачи, а являются универсальными соотношениями.

Кривые (18.15) называются *эпициклоидами*. Они располагаются в кольце

$$a_* < w < \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} a_* = w_{\max} \quad (18.16)$$

и представляют собой траектории точки окружности радиуса

$$\frac{a_*}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right),$$

катящейся по окружности радиуса a_* без скольжения в одну и другую сторону.

Течение типа простой волны

Дадим следующее определение: *простой волной* будем называть течение, в котором один из инвариантов Римана (18.15) является абсолютной константой. Иначе говоря, комбинация искомых переменных w , θ одинакова на всех линиях Маха одного семейства. Другими словами, вся область течения в физической плоскости отображается в одну эпициклоиду.

Для краткости формулу (18.15) перепишем так:

$$J_{\pm} = \theta \pm \psi(w) = \text{const}, \quad (18.17)$$

$$\begin{aligned} \psi(w) = \arcsin \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \left(1 - \frac{a_*^2}{w^2} \right)} - \\ - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsin \sqrt{\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{w^2}{a_*^2} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим простую волну, в которой $J_- = \text{const}$ во всем течении. Легко показать, что в такой простой волне характеристики C_+ — прямые линии. В самом деле, имеем $\theta + \psi(w) = \text{const}$ вдоль C_+ и там же $\theta - \psi(w) = \text{const}$, так как последняя комбинация по предположению постоянна во всей области. Складывая и вычитая эти два равенства, получим $\theta = \text{const}$ и $w = \text{const}$ на C_+ . Тогда на основании интегралов Бернулли и адиабатичности все остальные параметры течения (p , ρ , a , T , α) также постоянны вдоль C_+ . Угол наклона C_+ с осью x равен $\alpha - \theta$; так как α и θ постоянны вдоль C_+ , то C_+ — прямая линия.

Обтекание выпуклой стенки

Рассмотрим задачу обтекания выпуклой стенки равномерным сверхзвуковым потоком (плоское течение, рис. 18.2). Покажем, что решение этой задачи дается простой волной.

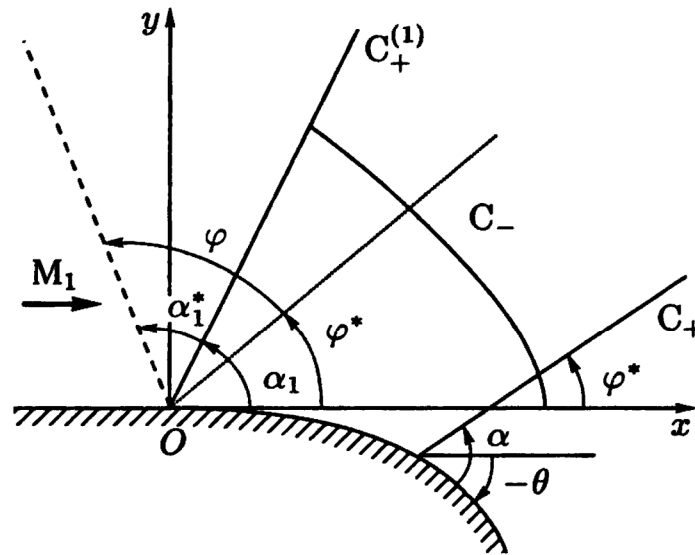


Рис. 18.2. Обтекание выпуклой стенки

Вначале в инвариантах Римана (18.17) перейдем от модуля скорости w к углу Маха α . Интеграл Бернулли

$$\frac{w^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2 \quad (18.18)$$

позволяет представить комбинации, входящие в $\psi(w)$, следующим образом:

$$1 - \frac{a_*^2}{w^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 \alpha, \quad \frac{w^2}{a_*^2} - 1 = \frac{\cos^2 \alpha}{\frac{\gamma + 1}{2} - \cos^2 \alpha}. \quad (18.19)$$

Подстановка (18.19) в (18.17) после простых преобразований дает

$$\psi(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right). \quad (18.20)$$

Равномерный сверхзвуковой поток с числом Маха $M_1 > 1$ движется около плоской стенки, которая в точке O переходит в криволинейную выпуклую стенку. Течение рассматривается в декартовой системе координат Oxy , где ось x направлена вдоль набегающего потока.

Стенка непроницаема, поэтому скорость потока на ней направлена по касательной.

По достижении точки O поток становится неоднородным. Однородный поток граничит с неоднородным по характеристике $C_+^{(1)}$, которая прямолинейна, поскольку все параметры на ней в силу непрерывности потока постоянны. Как видно из рис. 18.2, все характеристики C_- в области неоднородного потока исходят из граничной характеристики $C_+^{(1)}$. Поэтому константа в инварианте Римана J_- одинакова для всех C_- -характеристик, т. е. течение в области неоднородного потока описывается простой волной. Здесь мы имеем частный случай общего правила, согласно которому всякое неоднородное течение, граничащее с однородным потоком (или областью покоя), является течением типа простой волны. Итак, в области неоднородного течения имеем первый интеграл

$$\theta + \alpha + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \alpha_1 + \alpha_1^*, \quad (18.21)$$

$$\alpha_1^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \alpha_1 \right).$$

Все C_+ -характеристики в потоке — прямые линии, а все параметры потока вдоль каждой прямой C_+ постоянны. Из граничного условия, т. е. условия непроницаемости в точке пересечения произвольной C_+ -характеристики со стенкой, получаем

$$\alpha = -\theta + \varphi^*, \quad \varphi^* = \text{const} \quad \text{вдоль } C_+. \quad (18.22)$$

Угол φ^* — это угол произвольной C_+ -характеристики с осью x , т. е. новая переменная в неоднородной части потока.

Дальнейший план решения таков: выразить α и θ через φ^* из (18.21), (18.22), а затем φ^* через координаты x и y .

Подставляя (18.22) в (18.21), получим

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi^* = \varphi. \quad (18.23)$$

Из (18.23), (18.22) и (18.19) получим

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right), \quad (18.24)$$

$$\theta = \varphi^* - \alpha = \alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi - \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right) \right], \quad (18.25)$$

$$\frac{w^2}{a_*^2} = 1 + \frac{2}{\gamma-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right). \quad (18.26)$$

Все прочие параметры потока можно выразить через φ посредством известных формул, полученных из интеграла Бернулли и интеграла адиабатичности.

Наконец, выразим φ через x, y . Пусть обтекаемая стенка описывается уравнением $Y = Y(X)$. Уравнение произвольной C_+ -характеристики в принятых обозначениях запишется так:

$$y - Y = \operatorname{tg} \varphi^* (x - X). \quad (18.27)$$

Из условия непроницаемости получаем $\operatorname{tg} \theta = Y'(X)$. Это уравнение вместе с уравнением $Y = Y(X)$ позволяет представить уравнение стенки в параметрическом виде

$$X = X(\theta), \quad Y = Y(\theta). \quad (18.28)$$

Полагая $\varphi^* = \alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi$ и подставляя (18.25) в (18.28), получим искомую зависимость $\varphi = \varphi(x, y)$ в неявной форме

$$y - Y(\varphi) = \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi) (x - X(\varphi)). \quad (18.29)$$

Формулы (18.24)–(18.26), (18.29) дают полное решение задачи.

Обтекание выпуклого угла. Центрированная волна разрежения

Если $X = Y = 0$, имеем обтекание угловой точки, точнее, обтекание двух плоскостей, пересекающихся под тупым углом. Пусть θ_2 — угол второй плоскости с осью x ($\theta_2 < 0$). Область

неоднородного течения имеет вид веера прямолинейных C_+ -характеристик, исходящих из вершины тупого угла. Положение последней характеристики веера $C_+^{(2)}$ определяется формулами

$$\theta_2 = \alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi_2 - \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi_2 \right) \right], \quad (18.30)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi_2 \right).$$

Все параметры потока на $C_+^{(2)}$ и в однородном течении вдоль второй грани выпуклого угла определяются через параметр φ_2 .

Легко показать, что расширение газа возможно лишь до некоторого фиксированного угла. Поскольку w возрастает, то предельный поворот потока определится условием $w = w_{\max}$. Подставляя это условие в (18.26), получим

$$\frac{w_{\max}^2}{a_*^2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 1 + \frac{2}{\gamma-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi_{\max} \right), \quad (18.31)$$

$$\sin^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi_{\max} \right) = 1, \quad \varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Для воздуха при $\gamma = 1.4$ имеем $\varphi_{\max} = 219.3^\circ$. Напомним, что $-\varphi$ отсчитывается от направления под углом $\alpha_1 + \alpha_1^*$ к оси x . Если набегающий поток звуковой, то $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_1^* = 0$, т. е. $-\varphi$ надо отсчитывать от оси y . Предельное направление располагается на 39.3° левее направления вертикально вниз.

Наконец, выразим давление через φ :

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{w^2}{a_*^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \\ &= \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Итак, при $\varphi = \varphi_{\max}$ имеем $p = 0$, т. е. истечение в вакуум. Из (18.24) видно, что при $\varphi = \varphi_{\max}$ имеем $\alpha = 0$, т. е. линия тока и C_+ -характеристика совпадают.

Лекция 19

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Характеристики уравнений неравновесного течения газа. Роль замороженной скорости звука. Обтекание выпуклого угла релаксирующим газом. Качественная картина. Решение в окрестности первой характеристики веера. Переход к равновесному течению в центрированной волне разрежения.

В данной лекции метод характеристик применяется для приближенного анализа стационарного течения газа с релаксацией. Такой анализ позволяет понять структуру неравновесного течения с конечными возмущениями и изменение этой структуры с уменьшением времени релаксации, т. е. с переходом к равновесному течению.

Характеристики

В качестве конкретной модели релаксации всюду ниже используется модель совершенного двухатомного газа с неравновесным возбуждением колебательных степеней свободы. В качестве релаксирующего параметра вместо средней колебательной энергии $e_v(T_v)$ используется колебательная температура согласно приближенной формуле

$$e_v(T_v) = \dot{e}_v T_v. \quad (19.1)$$

Скорость релаксации всюду считается пропорциональной разности температур $T - T_v$. Тогда в естественных переменных s, n система уравнений плоского стационарного течения релаксирующего газа запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho w} \frac{\partial(\rho w)}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{1}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial s} - a_f^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho(\gamma - 1) \dot{e}_v \frac{\partial T_v}{\partial s} = 0, \quad w \frac{\partial T_v}{\partial s} = \frac{T - T_v}{\tau}, \quad p = \rho R T. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Второе, четвертое и пятое уравнения в (19.2) уже записаны в характеристической форме, через производные вдоль линии тока. Выражая $\partial \rho / \partial s$ из первого и второго уравнений че-

рез $\partial p/\partial s$ и $\partial \theta/\partial n$ и подставляя в четвертое уравнение вместе с $\partial T_v/\partial s$ из пятого уравнения, получим

$$\frac{M_f^2 - 1}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{(\gamma - 1)\dot{e}_v}{w a_f^2} \frac{T - T_v}{\tau} = 0. \quad (19.3)$$

Умножая (19.3) на $1/\sqrt{M_f^2 - 1}$, а третье уравнение (19.2) на ± 1 и складывая, после несложных преобразований получим два уравнения в характеристической форме:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{\rho w^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \pm \frac{1}{\sqrt{M_f^2 - 1}} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \pm \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \pm \frac{1}{\sqrt{M_f^2 - 1}} \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) + \\ + \frac{(\gamma - 1)\dot{e}_v}{\sqrt{M_f^2 - 1} w a_f^2} \frac{T - T_v}{\tau} = 0. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Как и в случае одномерных нестационарных течений, характеристики определяются замороженной скоростью звука a_f :

$$\frac{\partial}{\partial l_{\pm}} = \frac{\partial}{\partial s} \pm \frac{1}{\sqrt{M_f^2 - 1}} \frac{\partial}{\partial n}. \quad (19.5)$$

Далее, здесь также возникает вопрос о предельном переходе к равновесному течению при $\tau \rightarrow 0$. Прибавляя и вычитая в левой части четвертого уравнения (19.2) выражение $\rho(\gamma - 1)\dot{e}_v \partial T/\partial s$, легко преобразовать это уравнение к следующей форме:

$$\frac{\partial p}{\partial s} - a_e^2 \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\rho R \dot{e}_v}{c_{ve}} \frac{\partial (T_v - T)}{\partial s} = 0. \quad (19.6)$$

Рассматривая систему уравнений (19.2) с заменой четвертого уравнения системы уравнением (19.6), легко показать, что характеристики в пределе равновесного течения, т. е. при $\tau \rightarrow 0$, определяются равновесной скоростью звука a_e .

Обтекание выпуклого угла релаксирующим газом. Качественная картина

Пусть однородный равновесный поток двухатомного колебательно возбужденного газа натекает на угловую точку. Вследствие расширения газа при обтекании угловой точки может произойти запаздывание передачи колебательной энергии активным степеням свободы. Релаксация состояния газа к равновесному произойдет ниже по течению после окрестности угловой точки.

В результате необратимого процесса передачи энергии произойдет рост энтропии газа и искажение центрированной волны разрежения, описанной в предыдущей лекции для случая изэнтропического течения совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Однако относительная энергетическая роль колебательной степени свободы в двухатомном газе не слишком значительна. Наибольшее изменение теплоемкости составляет величину R : от $2.5 R$ при $e_v = 0$ до $3.5 R$ при $e_v = RT$. Это позволяет надеяться, что искажение веера волн разрежения, составленного из прямолинейных характеристик, также не будет слишком значительным.

Дадим описание качественной картины потока, исходя из сопоставления характерного времени течения $\tau_f = l/u$ и времени релаксации. Поскольку релаксация развивается вдоль траектории частицы, т.е. вдоль линии тока в стационарном течении, в качестве l удобно взять характерную длину участка линии тока; u — локальная скорость течения.

В однородном потоке при подходе к угловой точке условия течения одинаковы на всех линиях тока. Из общей теории характеристик следует, что однородный поток граничит с областью неоднородного течения по линии Маха $x = y\sqrt{M_f^2 - 1}$. После прохождения этой линии частицы газа попадают в совершенно различные условия. На линиях тока, близких к угловой точке, реализуется условие $\tau_f/\tau \ll 1$, т.е. течение близко к замороженному. Переход к равновесию происходит уже в области около второй грани угла. Напротив, вдали от угловой точки длина участков линий тока внутри веера очень большая, порядка их расстояния от угловой точки, так что $\tau_f/\tau \gg 1$, и течение газа близко к равновесному. Поэтому газ втекает в область около второй грани угла практически уже в состоянии полного равновесия.

Решение в окрестности первой характеристики веера

Чтобы понять характер деформации конечного возмущения, которое близко к замороженному вблизи угловой точки и близко к равновесному вдали от нее, попытаемся приближенно построить решение уравнений газовой динамики с релаксацией вблизи первой характеристики веера. Эта характеристика прямолинейна, так как отделяет однородный поток от неоднородного. Ее уравнение $x = y\sqrt{M_f^2 - 1}$ определяется замороженной скоростью звука a_f .

Решение удобно строить в полярной системе координат. Для этого уравнения (19.4), записанные в характеристических пере-

менных, перепишем в производных по полярным координатам. Формулы перехода имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial l_{\pm}} = \frac{\cos(\varphi^* - \theta \mp \alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi^* - \theta \mp \alpha)}{\cos \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (19.7)$$

Здесь также сделана замена $\partial/\partial\varphi = -\partial/\partial\varphi^*$ в соответствии с формулой связи углов $\alpha_1 + \alpha_1^* = \varphi + \varphi^*$ (см. рис. 18.2). Уравнения (19.4) принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{\rho w^2} \left[\frac{\cos(\varphi^* - \theta - \alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi^* - \theta - \alpha)}{\cos \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \\ & + \left[\frac{\cos(\varphi^* - \theta - \alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi^* - \theta - \alpha)}{\cos \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right] + \lambda \frac{T - T_v}{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (19.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{\rho w^2} \left[\frac{\cos(\varphi^* - \theta + \alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi^* - \theta + \alpha)}{\cos \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] - \\ & - \left[\frac{\cos(\varphi^* - \theta + \alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\sin(\varphi^* - \theta + \alpha)}{\cos \alpha} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right] + \lambda \frac{T - T_v}{\tau} = 0. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{(\gamma - 1)\dot{e}_v}{\sqrt{M_f^2 - 1} w a_f^2}.$$

Продифференцируем (19.8) по φ и запишем результат на первой характеристике веера. После этого запишем (19.9) на первой характеристике веера (напомним, что запись на этой характеристике означает $\theta = 0$, $\alpha = \varphi^* = \alpha_1$, $T = T_v$, все параметры вдоль характеристики постоянны, но не их производные по φ):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{\rho w^2} \left[\frac{1}{\cos \alpha_1} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos \alpha_1} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left(-1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right) \right] + \\ & + \left[\frac{1}{\cos \alpha_1} \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos \alpha_1} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \left(-1 - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right) \right] + \\ & + \frac{\lambda}{\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} - \frac{\partial T_v}{\partial \varphi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (19.10)$$

$$\frac{\sqrt{M_f^2 - 1}}{\rho w^2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0. \quad (19.11)$$

Выражения $\partial \alpha / \partial \varphi$, $\partial T / \partial \varphi$ и $\partial T_v / \partial \varphi$ вычислим с помощью еще не использованных уравнений (19.2): второго, четвертого и пятого, т. е. уравнений в характеристической форме, записанных вдоль линии тока. На первой характеристике веера получим

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \cos \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho w a_f} \left(\frac{\gamma - 1}{2} + \frac{1}{M_f^2} \right) \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial T_v}{\partial \varphi} = 0. \quad (19.12)$$

Подставляя (19.12) и $\partial \theta / \partial \varphi$ из (19.11) в (19.10), после несложных преобразований получим уравнение для $\partial p / \partial \varphi$ вдоль первой характеристики веера

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{a_2 r} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad (19.13)$$

$$a_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{\dot{e}_v \rho a_f}{c_p \tau}, \quad a_2 = \frac{2\gamma p}{\gamma + 1} \sqrt{M_f^2 - 1}.$$

Фактически уравнение (19.13) можно рассматривать как уравнение для разрыва нормальной производной давления вдоль первой характеристики веера, поскольку слева от нее, т. е. в однородном потоке, $\partial p / \partial \varphi = 0$. Начальное значение для $\partial p / \partial \varphi$ при $r = 0$ получается из условия регулярности уравнения при $r \rightarrow 0$:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right|_{r=0} = -a_2. \quad (19.14)$$

Это же условие получится, если вспомнить, что предельным течением при малых r является замороженная центрированная волна разрежения. Решение лекции 18, а именно: формулы (18.32), (18.26) и вторая формула (18.21) дают условие (19.14).

Решение задачи (19.13), (19.14) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{-a_1 r}{\exp(a_1 r / a_2) - 1}. \quad (19.15)$$

Произведение $a_1 r$, кроме константы размерности давления ρa_f^2 , содержит безразмерную комбинацию $r / (\tau a_f)$, имеющую смысл отношения характерного времени течения к времени релаксации τ . Видно, что с ростом r возмущение на первой характеристике веера стремится к нулю как $a_1 r \exp(-a_1 r)$, т. е. почти экспоненциально затухает. Характерной длиной затухания служит характерная длина релаксации τa_f .

Переход к равновесию в течениях с конечными возмущениями на примере центрированной волны разрежения

Решение (19.15) позволяет проследить эволюцию конечного возмущения, состоящего в обтекании угловой точки, по мере перехода неравновесного течения к равновесному. В неравновесном течении характеристики по-прежнему являются «носителями» возмущений, т. е., как и в совершенном газе, разделяют области течения с разными дифференциальными свойствами. Однако, в отличие от совершенного газа, амплитуда возмущения вдоль граничной характеристики не остается постоянной, а затухает на длине порядка характерной длины релаксации при переходе из области почти замороженного течения в область почти равновесного течения. Возмущение как бы «уходит» с первой характеристики веера, определяемой скоростью звука a_f , по мере удаления от угла и концентрируется в окрестности характеристики, определяемой скоростью звука a_e , так что в предельном равновесном течении на бесконечном расстоянии от угловой точки первой характеристикой веера становится прямая $x = y\sqrt{M_e^2 - 1}$.

Это последнее обстоятельство полученным здесь решением не демонстрируется. Оно описано в монографии [9], где приводится решение в линейном приближении при обтекании малого угла поворота. Данная эволюция возмущения изображена схематически на рис. 19.1 для величины элементарного падения дав-

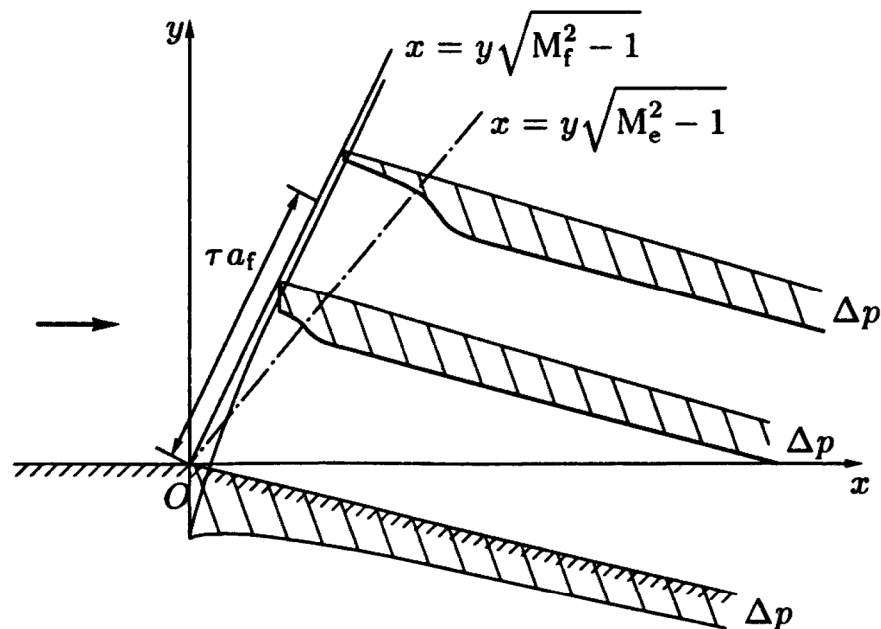


Рис. 19.1. Элементарное падение давления Δp в передней части центрированной волны разрежения

ления на малом угле поворота в передней части центрированной волны разрежения $\Delta p = (\partial p / \partial \varphi) \Delta \varphi$. Если принять, что $\Delta \varphi$ не зависит от r , то изменение Δp целиком воспроизводит изменение $\partial p / \partial \varphi$ в рассматриваемой области. Сплошные линии на разных расстояниях от угла показывают изменение Δp . Из рисунка видно, как величина Δp «переходит» с характеристики $x = y \sqrt{M_f^2 - 1}$ на линию $x = y \sqrt{M_e^2 - 1}$, которая в предельном равновесном течении становится характеристикой.

Лекция 20

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Поверхности разрыва. Косая ударная волна. Ударная полара (гипоцистоида). Предельные свойства в гиперзвуковом потоке.

Здесь рассматриваются стационарные течения с ударными волнами. В большинстве случаев ударные волны имеют вид кривых линий, так что течения за ними являются вихревыми.

Поверхности разрыва

Движение сплошной среды управляется законами сохранения массы, импульса и энергии. Отсюда вытекает, что при переходе через любую поверхность, включая возможные поверхности разрыва, потоки этих величин должны сохраняться.

Потоки массы ρv и энергии $\rho v(h + v^2/2)$, осуществляющие перенос скалярных величин ρ и $\rho(h + v^2/2)$, сами являются векторами. Поток импульса в невязком газе

$$\Pi = P + \rho v v = pU + \rho v v \quad (20.1)$$

переносит векторную величину и сам является тензором.

Пусть имеем произвольную поверхность разрыва. Выпишем соотношения, выражающие непрерывность указанных выше потоков через элементарную площадку с нормалью n . Используя, как и ранее, квадратные скобки для обозначения разности величин по обе стороны поверхности, в качестве непрерывности потоков массы и энергии получим

$$[\rho v_n] = 0, \quad \left[\rho v_n \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (20.2)$$

Поток импульса через площадку с нормалью n является вектором, равным скалярному произведению тензора Π на n :

$$\Pi \cdot n = pU \cdot n + \rho v(v \cdot n), \quad \Pi \cdot n \{ p + \rho v_n^2, \rho v_{\tau 1} v_n, \rho v_{\tau 2} v_n \}. \quad (20.3)$$

В (20.2) и (20.3) $v_n, v_{\tau 1}, v_{\tau 2}$ — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат, одна из осей которой ориенти-

рована по нормали к площадке. При переходе через поверхность разрыва должны быть непрерывны все три компоненты вектора (20.3):

$$[p + \rho v_n^2] = 0, \quad [\rho v_{\tau 1} v_n] = 0, \quad [\rho v_{\tau 2} v_n] = 0. \quad (20.4)$$

Последние два условия (20.4) можно записать как одно условие непрерывности касательной к поверхности компоненты скорости

$$[\rho v_n v_{\tau}] = 0. \quad (20.5)$$

Окончательно, полная система условий на поверхности разрыва имеет вид

$$[\rho v_n] = 0, \quad [p + \rho v_n^2] = 0, \quad [\rho v_n v_{\tau}] = 0, \quad \left[\rho v_n \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] = 0. \quad (20.6)$$

Возможны два основных типа сильных разрывов.

1. Пусть газ течет вдоль поверхности разрыва, не пересекая ее. Тогда $v_n = 0$, и первое, третье и четвертое соотношения из (20.6) удовлетворяются тождественно. Из второго соотношения (20.6) получаем условие непрерывности давления

$$[p] = 0. \quad (20.7)$$

Изменения плотности, касательной скорости и внутренней энергии при пересечении такого разрыва произвольны.

Такая поверхность называется *тангенциальным разрывом*.

2. Если газ перетекает через поверхность, то с учетом первого и третьего соотношений из (20.6) условия на разрыве можно переписать так:

$$[\rho v_n] = 0, \quad [p + \rho v_n^2] = 0, \quad \left[h + \frac{v_n^2}{2} \right] = 0, \quad [v_{\tau}] = 0. \quad (20.8)$$

Такая поверхность называется *ударной волной*.

Косая ударная волна

В плоском или осесимметричном течениях поверхность разрыва представляет собой цилиндр, или поверхность вращения. Используя принятое ранее обозначение для вектора скорости w , запишем условия на ударной волне в плоскости течения следующим образом:

$$[\rho w_n] = 0, \quad [p + \rho w_n^2] = 0, \quad \left[h + \frac{w_n^2}{2} \right] = 0, \quad [w_{\tau}] = 0. \quad (20.9)$$

Рассматривая элементарный участок ударной волны в плоскости течения, будем говорить далее о *прямолинейной косой*

ударной волне, составляющей угол φ с направлением втекающего в нее потока газа.

Заметим вначале, что первые три условия (20.9) совпадают с условиями на прямой ударной волне ($\varphi = \pi/2$) с заменой $w_n = u$. Далее остановимся главным образом на преобразовании поля скоростей при переходе через косую ударную волну.

Последнее соотношение (20.9) определяет условия поворота потока в косом скачке. Все выводы, сделанные в теории прямого скачка, будут справедливы и здесь после указанной выше замены. В частности, имеет место $w_{n1} > a_1$, $w_{n2} < a_2$. Течение за косым скачком может быть как дозвуковым, так и сверхзвуковым. Поскольку w_n при переходе через скачок уменьшается, линии тока за скачком поворачиваются в сторону скачка.

Все термодинамические соотношения из теории прямого скачка без изменений переносятся на косой скачок. Рассмотрим закономерности, описывающие поле скоростей при повороте газового потока в косом скачке. Для простоты и наглядности результатов будем использовать модель совершенного газа с постоянными теплоемкостями.

Картина течения показана на рис. 20.1. Введем систему координат (x, y) так, чтобы направление оси Ox совпадало с направлением скорости перед ударной волной. Здесь φ — угол скачка с осью Ox , χ — угол направления скорости за скачком. Запишем условие сохранения касательной скорости. Имеем

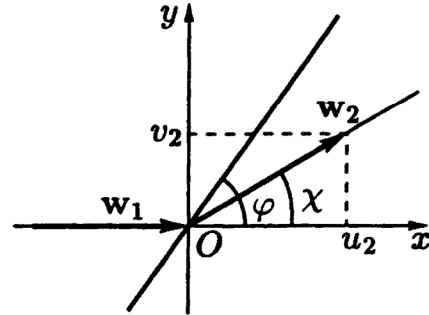


Рис. 20.1. Косая ударная волна

$$w_{\tau 1} = w_1 \cos \varphi, \quad w_{\tau 2} = u_2 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi. \quad (20.10)$$

Здесь $w_{\tau 1}$ и $w_{\tau 2}$ — касательные компоненты скорости до и после скачка. Четвертое условие из (20.9) запишется так:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{v_2}{w_1 - u_2}. \quad (20.11)$$

Выразим теперь нормальные компоненты:

$$w_{n1} = w_1 \sin \varphi, \quad w_{n2} = u_2 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi. \quad (20.12)$$

Подставляя их в формулу для отношения скоростей на прямой ударной волне, получим

$$\frac{u_2 - v_2 \operatorname{ctg} \varphi}{w_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2(\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1)}{(\gamma + 1)M_1^2}. \quad (20.13)$$

Исключая φ из (20.11), (20.13), получим *уравнение поляры*, связывающее компоненты скорости за скачком u_2 и v_2 с условиями в набегающем потоке. Выразая v_2 через u_2 , получим

$$v_2^2 = \frac{\frac{u_2}{w_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - \frac{2a_1^2}{(\gamma + 1)w_1^2}}{\frac{1}{w_1(w_1 - u_2)} + \frac{2a_1^2}{(\gamma + 1)w_1^2(w_1 - u_2)^2}}. \quad (20.14)$$

Эта формула дает геометрическое место концов векторов скорости газа после поворота в произвольном скачке, помещенном в заданный поток газа.

С использованием критической скорости a_* уравнение ударной поляры несколько упрощается:

$$v_2^2 = (w_1 - u_2)^2 \frac{u_2 w_1 - a_*^2}{\frac{2}{\gamma - 1} w_1^2 - u_2 w_1 + a_*^2}. \quad (20.15)$$

Формула (20.14) или (20.15) изображает *гипоциссоиду* (которая показана на рис. 20.2). Точки $P(a_*^2/w_1, 0)$ и $Q(w_1, 0)$ соответствуют прямому скачку и линии Маха. Вертикальная асимптота имеет координату

$$u_2 = \frac{2}{\gamma + 1} w_1 + \frac{a_*^2}{w_1}.$$

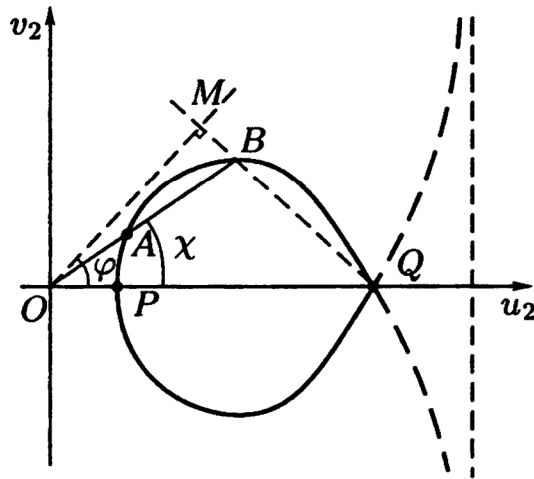


Рис. 20.2. Ударная поляра

Ветви кривой, показанные штриховыми линиями, физического смысла не имеют, так как для них $u_2 > w_1$.

Каждая точка ударной поляры дает величину скорости за скачком, поворачивающим поток на угол χ , равный полярному углу этой точки. Каждому углу, кроме предельного $\chi_{\max}$,

соответствуют две точки, A и B , и два значения скорости. Иначе говоря, на заданный угол поток может повернуться в двух ударных волнах различной интенсивности. Точка A отвечает сильной ударной волне, точка B — слабой, $w_2(A) < w_2(B)$.

Чтобы определить направление ударной волны, поворачивающей поток на угол χ , нужно найти направление, для которого проекции отрезков $w_1(OQ)$ и $w_2(OB)$ одинаковы. Очевидно, это направление дается перпендикуляром OM , опущенным на

прямую BQ . В частности, при определении «скачка» для точки Q получим $\varphi = \alpha$, т. е. линию Маха.

Рассмотрим предельные формы ударной поляры. При $M_1 \rightarrow 1$ поляра стягивается в точку $P(a_*, 0)$; здесь имеем $\chi_{\max} = 0$. При $M_1 \rightarrow \infty$ имеем

$$w_1 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} a_*,$$

и уравнение (20.14) описывает окружность

$$\left(u_2 - \frac{\gamma}{\gamma+1} w_1\right)^2 + v_2^2 = \frac{1}{(\gamma+1)^2} w_1^2. \quad (20.16)$$

В этом случае для предельного угла поворота имеем

$$\sin \chi_{\max} = \frac{1}{\gamma}. \quad (20.17)$$

Если в (20.16) положить $\gamma \rightarrow 1$, то окружность будет касаться оси ординат. В этом предельном случае угол поворота потока в скачке равен углу скачка, а предельный угол поворота равен 90° .

При любых значениях $\gamma > 1$ предельный угол поворота потока в скачке с ростом числа M_1 монотонно увеличивается от нуля до значения (20.17).

Запишем отношение давлений в косом скачке:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}. \quad (20.18)$$

Интенсивность ударной волны монотонно возрастает с ростом φ :

при $\varphi = \arcsin(1/M_1)$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1;$$

при $\varphi = \pi/2$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}.$$

Поскольку изменение энтропии в ударной волне однозначно выражается через p_1/p_2 , из (20.18) вытекает, что за криволинейной ударной волной в однородном потоке энтропия будет различной на разных линиях тока. Это — основной источник завихренности в сверхзвуковых потоках.

Лекция 21

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ТЕЧЕНИЯ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Отражение ударных волн. Обтекание клина. Обтекание пластины под углом атаки. Обтекание конуса. Течение около вогнутой поверхности.

Здесь рассматриваются простые стационарные течения газа, в которых определяющую роль играют положение и форма ударных волн. Как правило, решения задач выражаются в элементарных функциях. Рассматриваемые течения выступают элементами многих прикладных проблем современной летательной техники.

Отражение ударных волн

Из ограниченности величины $\chi_{\max}$ (максимального угла отклонения потока в косой ударной волне) вытекают закономерности отражения косых скачков от твердой стенки или плоскости симметрии течения.

Пусть однородный сверхзвуковой поток с числом Маха M_1 движется вдоль твердой стенки (рис. 21.1, а). В падающем скачке, наклоненном под углом β_1 к этому потоку, происходит по-

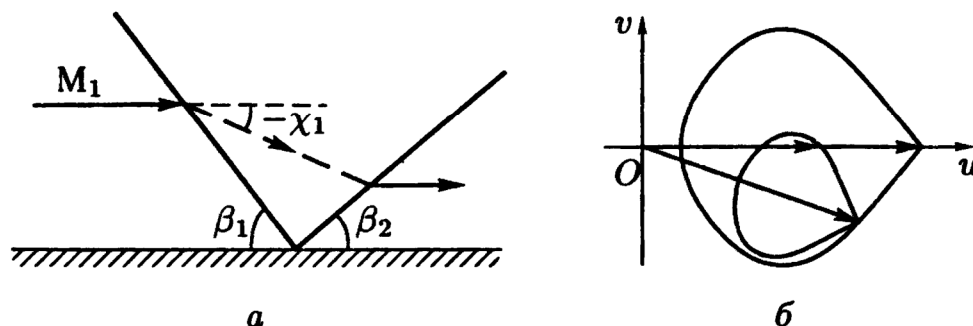


Рис. 21.1. Регулярное отражение косой ударной волны

ворот потока на угол χ_1 . Здесь $\chi_1 < \chi_{\max}(M_1)$. Одновременно происходит уменьшение числа Маха до значения $M_2 < M_1$. В отраженном скачке поток должен повернуться обратно на угол χ_1 .

Если $\chi_1 < \chi_{\max}(M_2)$, то такой поворот состоится, и поток за отраженным скачком будет вновь направлен вдоль стенки. При

этом угол отражения β_2 в общем случае не равен углу падения β_1 . Эта конфигурация отражения косой ударной волны называется *регулярным отражением*, она показана на рис. 21.1, а. Расположение ударных поляр падающего и отраженного скачков показано на рис. 21.1, б.

Однако может случиться, что $\chi_1 > \chi_{\max}(M_2)$, т.е. угол обратного поворота потока в отраженном скачке превышает максимальный угол поворота, так как $M_2 < M_1$, а $\chi_{\max}$ уменьшается с уменьшением M . В этом случае поворот на угол χ_1 невозможен, и картина регулярного отражения разрушается, превращаясь в конфигурацию ударных волн с тройной точкой. От тройной точки отходит поверхность тангенциального разрыва, так как сжатие газа в двух косых скачках в общем случае неэквивалентно сжатию в одном скачке. Такая конфигурация отражения называется *маховским отражением* ударных волн. Этот случай показан на рис. 21.2, а. Иногда говорят, что в этом

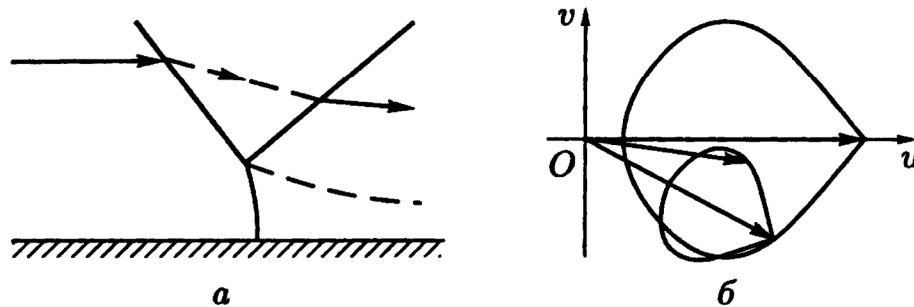


Рис. 21.2. Маховское отражение косой ударной волны

случае точка отражения падающего косого скачка «всплывает» относительно отражающей стенки. «Ножка» маховской конфигурации является криволинейной ударной волной, угол ее касательной с направлением стенки изменяется монотонно от угла наклона в тройной точке, обеспечивающего равенство давлений по обе стороны тангенциального разрыва, до прямого угла при пересечении с твердой стенкой. При маховской конфигурации отраженный скачок также будет криволинейным, так как поток за ним представляет собой течение около криволинейной поверхности тангенциального разрыва. Расположение ударных поляр падающего и отраженного скачков в тройной точке показано на рис. 21.2, б.

Обтекание клина

Рассмотрим сверхзвуковой поток, натекающий на клин с углом полураствора χ . Задача обтекания клина полностью решается введением косого скачка в вершине клина под углом φ .

Этот угол легко определить с помощью ударной поляры как направление, на которое векторы скорости до и после скачка проектируются в одну и ту же точку. В скачке однородный поток поворачивается на угол χ ; параметры потока определяются соотношениями на косом скачке (см., например, уравнение (20.18)).

Из уравнения ударной поляры получаются два угла косо-го скачка, сильного и слабого. На практике всегда реализуется слабый скачок. Однако, если каким-либо способом задать повышенное давление в области вниз по потоку, может реализоваться сильный скачок.

Если при заданной скорости набегающего потока M_1 $\chi > \chi_{\max}(M_1)$, то задача обтекания бесконечного клина сверхзвуковым потоком решения не имеет. Если клин конечен, то образуется отошедшая криволинейная ударная волна, а расстояние отхода от вершины клина определяется размером клина.

Обтекание пластины под углом атаки

Пусть угол атаки $\alpha < \chi_{\max}(M_1)$. Тогда расчет всего течения состоит в двукратном использовании соотношений на косом скачке и в центрированной волне разрежения (рис. 21.3). Угол хвостового тангенциального разрыва с набегающим потоком определяется из условия равенства давлений на разрыве. Наличие такого разрыва вытекает из того факта, что скачки над и под пластиной имеют разные интенсивности. Легко видеть, что под пластиной давление выше, чем над ней.

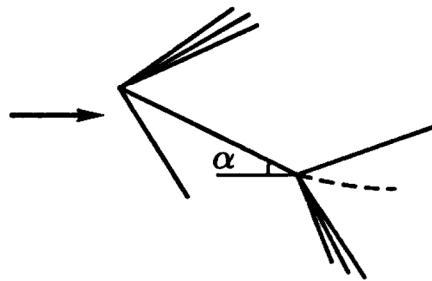


Рис. 21.3. Обтекание пластины под углом атаки

Аналогично решается задача симметричного (и несимметричного) обтекания ромба.

Аналогично решается задача симметричного (и несимметричного) обтекания ромба.

Обтекание конуса

Рассмотрим сверхзвуковое осесимметричное обтекание бесконечного кругового конуса с углом полураствора θ_c . Задача не имеет характерного размера, поэтому решение зависит только от полярного угла. Систему уравнений газовой динамики запишем в сферической системе координат r, θ, φ с центром в вершине

конуса. Поскольку решение зависит только от θ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2r\rho v_r \sin \theta + r v_\theta \sin \theta \frac{d\rho}{d\theta} + \rho r \sin \theta \frac{dv_\theta}{d\theta} + \rho v_\theta r \cos \theta = 0, \quad (21.1)$$

$$\frac{dv_r}{d\theta} = v_\theta, \quad \frac{v_\theta}{r} \frac{dv_\theta}{d\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{dp}{d\theta}, \quad \frac{dp}{d\theta} = a^2 \frac{d\rho}{d\theta}.$$

Исключая давление из двух последних уравнений (21.1):

$$\frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = - \left(v_\theta \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r v_\theta \right) = - \left(\frac{dv_r}{d\theta} \frac{d^2 v_r}{d\theta^2} + \frac{dv_r}{d\theta} v_r \right), \quad (21.2)$$

и подставляя второе уравнение (21.1) и уравнение (21.2) в первое уравнение (21.1), получим одно уравнение для радиальной составляющей скорости v_r :

$$\left(\frac{dv_r}{d\theta} \right)^2 \left(v_r + \frac{d^2 v_r}{d\theta^2} \right) = a^2 \left(\frac{d^2 v_r}{d\theta^2} + \frac{dv_r}{d\theta} \operatorname{ctg} \theta + 2v_r \right). \quad (21.3)$$

Скорость звука a вычисляется из уравнения Бернулли

$$a^2 = \frac{\gamma - 1}{2} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2 - v_r^2 - \left(\frac{dv_r}{d\theta} \right)^2 \right].$$

Поставим граничные условия:
на конусе ($v_\theta = 0$)

$$\frac{dv_r}{d\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_c;$$

на ударной волне, которая из-за отсутствия характерного линейного размера также имеет форму кругового конуса с углом полураствора θ_s ,

$$v_r = w_1 \cos \theta,$$

$$\frac{dv_r}{d\theta} = w_1 \sin \theta \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \theta} \right) \quad \text{при} \quad \theta = \theta_s.$$

Имеем замкнутую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка (21.3). Лишнее граничное условие (их всего три) используется для определения заранее не известного значения угла ударной волны θ_s . Краевая задача

решается численно при различных значениях γ , M , θ_c . Имеются многочисленные издания таблиц обтекания конуса.

Как и в случае обтекания клина, имеется предельный угол конуса $\theta_{c \max}$, выше которого автомодельное решение отсутствует.

Течение около вогнутой поверхности

Пусть стенка искривляется с непрерывным изменением касательной в сторону потока. Поскольку образуется течение торможения, угол линий Маха вниз по потоку будет расти, и это может привести к их пересечению. Решение при этом станет физически бессмысленным, так как каждая прямолинейная линия Маха несет на себе свои значения параметров потока. Трудность

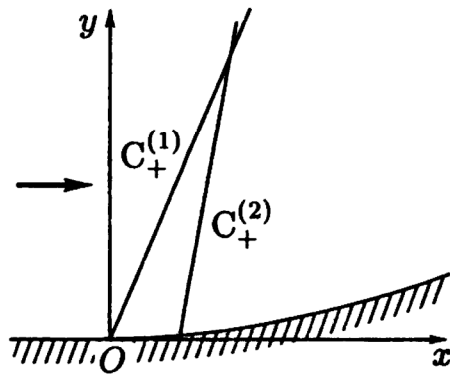


Рис. 21.4. Обтекание вогнутой стенки

разрешается введением криволинейной ударной волны, зарождающейся внутри потока.

Начало ударной волны определяется первой точкой пересечения линий Маха. Пусть для простоты эта точка располагается на первой линии Маха, отделяющей однородный поток от области возмущенного течения (рис. 21.4). Сформулируем условие пересечения характеристик. Будем двигаться вдоль прямой $x = \text{const}$ в сторону увеличения y .

При этом движемся пересекаем характеристики C_+ с изменяющимся параметром φ (см. формулу (18.29)). Если характеристики C_+ не пересекаются, то параметр φ меняется монотонно; напротив, пересечение линий C_+ означает нарушение монотонности изменения φ . Поэтому условие пересечения имеет вид

$$\left. \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right|_x = 0.$$

Определим координаты этой точки, пользуясь уравнением C_+ -характеристик в простой волне

$$y - Y(\varphi) = \text{tg}(\alpha_1^* + \alpha_1 - \varphi)(x - X(\varphi)). \quad (21.4)$$

Напомним, что угол скорости θ связан с параметром φ в простой волне соотношением

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi - \text{arctg} \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \text{ctg} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \varphi \right]. \quad (21.5)$$

Вычислим $\partial y / \partial \varphi \big|_x$ с помощью (21.4), (21.5) при $Y = 0$, $X = 0$, $Y' = 0$, $\theta = 0$ (напомним, что $\theta = \theta(\varphi)$ (21.5) входит в (21.4) через уравнение стенки $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \bigg|_x &= Y' \frac{dX}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi} - \frac{1}{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi)} (x - X) + \\ &+ \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_1^* - \varphi) \left(-\frac{dX}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{d\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя значения на начальной характеристике, получим координаты искомой точки (x_*, y_*) :

$$x_* = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\sin \alpha_1 \cos^3 \alpha_1}{d\theta/dX}, \quad y_* = \operatorname{tg} \alpha_1 x_*. \quad (21.6)$$

Видно, что если $d\theta/dX = 0$, т.е. стенка искривляется с непрерывной первой и второй производными, то ударная волна не может начинаться на первой линии Маха, а только внутри области возмущенного течения.

Лекция 22

АЭРОДИНАМИКА ТОНКОГО ПРОФИЛЯ КРЫЛА

Линеаризация уравнения для потенциала. Дозвуковое и сверхзвуковое обтекания тонкого профиля. Формулы подъемной силы. Околозвуковой закон подобия для тонких тел.

Следующие четыре лекции посвящены задачам внешней аэродинамики. Как уже отмечалось во введении, теоретическая основа современной летательной техники состоит из трех основных проблем: теории несущей поверхности (теория крыла), обтекания удлиненных, относительно тонких тел (аэродинамика фюзеляжа самолета и ракеты), обтекания коротких плохо обтекаемых тел типа сферы (аэродинамика спускаемых аппаратов). Эти проблемы обсуждаются ниже.

Линеаризация уравнения для потенциала и интеграла Бернулли

Одним из наиболее развитых методов в задачах внешней аэродинамики является метод малых возмущений. Предполагается, что форма тела такова, что при обтекании его потоком газа с большой скоростью производимые телом возмущения малы по сравнению с соответствующими параметрами основного потока. Рассмотрим потенциальные течения. Напомним, что даже в сверхзвуковом потоке потенциальность течения сохранится при наличии малых возмущений, поскольку изменение энтропии в искривленных слабых ударных волнах — малая высшего порядка.

Представим полный потенциал φ_1 в виде суперпозиции потенциалов двух потоков, однородного и возмущенного:

$$\varphi_1 = w_1(x + \varphi), \quad \varphi_{1x} = w_1(1 + \varphi_x), \quad \varphi_{1y} = w_1\varphi_y \quad (22.1)$$

(рассматриваем случай плоского течения). Уравнение для потенциала имеет вид

$$(a^2 - \varphi_{1x}^2) \varphi_{1xx} + (a^2 - \varphi_{1y}^2) \varphi_{1yy} - 2\varphi_{1x}\varphi_{1y}\varphi_{1xy} = 0. \quad (22.2)$$

Подставляя (22.1) в (22.2) и отбрасывая малые члены, получим для потенциала возмущенного течения

$$(1 - M_1^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad M_1 = \frac{w_1}{a_1}. \quad (22.3)$$

Получим формулу для вычисления давления в слабо возмущенном потоке. В интеграл Бернулли

$$\frac{\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a_*^2$$

подставим выражения $p = p_1 + \Delta p$, $\rho = \rho_1 + \Delta \rho$. Из интеграла адиабатичности установим соотношение

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{\gamma \Delta \rho}{\rho_1}.$$

Отбрасывая в интеграле Бернулли малые высшего порядка, получим

$$w_1^2 \varphi_x + \frac{\Delta p}{\rho_1} = 0, \quad \Delta p = -\rho_1 w_1^2 \varphi_x. \quad (22.4)$$

Дозвуковое обтекание тонкого профиля, закон Прандтля–Глауэрта

Рассмотрим обтекание профиля крыла дозвуковым потоком. Условие непроницаемости на поверхности профиля запишется так:

$$(1 + \varphi_x) n_x + \varphi_y n_y = 0, \quad (22.5)$$

где n_x , n_y — проекции нормали. Так как профиль тонкий, то n_x мало, а $n_y \approx \pm 1$. Тогда граничное условие (22.5) принимает вид

$$n_x \pm \varphi_y = 0 \quad \left(n_x = -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \quad (22.6)$$

на отрезке $[0, 1]$ оси Ox .

Таким образом, для определения поля скоростей около профиля крыла имеем задачу (22.3), (22.6) и условие (22.4) для определения возмущений давления. Сделаем простое преобразование переменных:

$$x' = x, \quad y' = \sqrt{1 - M_1^2} y, \quad \varphi' = \sqrt{1 - M_1^2} \varphi. \quad (22.7)$$

Получим

$$\varphi'_{x'x'} + \varphi'_{y'y'} = 0, \quad n_{x'} \pm \varphi'_{y'} = 0. \quad (22.8)$$

Профиль обтекаемого тела при этом преобразовании оставляем неизменным (это важно, так как в противном случае изменится n_x). Таким образом, имеем задачу обтекания тела несжимаемой жидкостью. Ее решение хорошо изучено.

Определим подъемную силу. Из выражения (22.4) для давления получим

$$\Delta p = -\rho_1 w_1^2 \varphi'_{x'} \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}. \quad (22.9)$$

Иначе говоря, подъемная сила в сжимаемом газе изменится в $1/\sqrt{1 - M_1^2}$ раз:

$$F_y = \frac{F'_{y'}}{\sqrt{1 - M_1^2}} \quad (M_1 < 1), \quad (22.10)$$

где $F'_{y'}$ — результат расчета обтекания профиля несжимаемой жидкостью (подъемная сила в сжимаемом газе увеличивается). Легко видеть, что циркуляция

$$\Gamma = \oint \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \oint u dx + v dy = \oint \varphi_x dx + \varphi_y dy$$

изменяется при замене переменных (22.7) по закону, аналогичному (22.10), поэтому в сжимаемом газе остается справедливой формула Жуковского

$$F_y = \rho w_1 \Gamma.$$

Правило (22.10) называется *законом Прандтля–Глауэрта*. Указанную теорию несложно обобщить на случай крыла конечного размаха в дозвуковом потоке.

В частности, для плоской пластины бесконечного размаха

$$c_y = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1 - M_1^2}} = \frac{F_y}{0.5 \rho w_1^2 a},$$

где α — угол атаки, a — ширина пластины.

Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля, закон Аккерета

Рассмотрим тонкий профиль крыла в сверхзвуковом потоке. Пусть профиль расположен так, что его передняя кромка имеет координаты $x = 0$, $y = \tau$, а для задней кромки имеем $x = l$, $y = 0$, причем $\tau \ll l$. Скорость набегающего потока совпадает

с положительным направлением оси Ox . В силу сделанных выше замечаний об интенсивности ударных волн течение можно считать потенциальным. Уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (M_1^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (22.11)$$

с граничным условием (22.6).

Имеем волновое уравнение ($M_1^2 > 1$), для которого легко написать общее решение. Обозначим $\beta^2 = M_1^2 - 1$ и получим

$$\varphi = f_1(x + \beta y) + f_2(x - \beta y). \quad (22.12)$$

Поскольку возмущения исходят от тела, то в верхней полуплоскости решение описывается функцией f_2 , а в нижней полуплоскости функцией f_1 . Пусть $\zeta_1(x)$ — уравнение нижней линии контура крыла, $\zeta_2(x)$ — уравнение верхней линии. Найдем произвольные функции f_1 и f_2 , применяя граничное условие.

Рассмотрим верхнюю линию. Имеем $n_x \approx -\zeta_2'(x)$ (пренебрегая в (22.6) квадратом производной по сравнению с единицей). Тогда

$$\varphi_y = \zeta_2'(x) = -\beta f_2'(x), \quad \text{т. е.} \quad f_2 = -\frac{1}{\beta} \zeta_2(x). \quad (22.13)$$

Итак, решение в верхней полуплоскости, удовлетворяющее граничному условию непроницаемости, имеет вид

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{\beta} \zeta_2(x - \beta y). \quad (22.14)$$

Аналогично, для нижней полуплоскости получим решение

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\beta} \zeta_1(x + \beta y). \quad (22.15)$$

Очевидно, все параметры течения постоянны на линиях $x - \beta y = \text{const}$ и $x + \beta y = \text{const}$. Иначе говоря, решение задачи конструируется из течений типа простой волны. Наклон характеристик всюду одинаков — это есть следствие линейного приближения.

Вычислим давление на профиль с помощью (22.4). Имеем

$$c_p = \frac{\Delta p}{0.5 \rho_1 w_1^2} = -2\varphi_x, \quad c_{p1} = -\frac{2}{\beta} \zeta_1'(x), \quad c_{p2} = \frac{2}{\beta} \zeta_2'(x). \quad (22.16)$$

Вычислим силы, действующие на профиль. Необходимо проинтегрировать формулы (22.16) по всему контуру:

$$F_y = \int_0^l (p - p_1)_1 dx - \int_0^l (p - p_1)_2 dx \quad (22.17)$$

(положительным направлением силы считаем направление вверх),

$$\begin{aligned} c_y &= \frac{F_y}{0.5 \rho_1 w_1^2 l} = \frac{1}{l} \left(\int_0^l c_{p1} dx - \int_0^l c_{p2} dx \right) = \\ &= -\frac{2}{\beta l} \int_0^l [\zeta'_1(x) + \zeta'_2(x)] dx = -\frac{2}{\beta l} (\zeta_1 + \zeta_2) \Big|_0^l = \\ &= -\frac{2}{\beta l} (0 - 2\tau) = \frac{4\tau}{\beta l}. \end{aligned} \quad (22.18)$$

Определим угол атаки:

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau}{l}.$$

Тогда

$$c_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}. \quad (22.19)$$

Это выражение называется *формулой Аккерета* (она дает коэффициент подъемной силы, который не зависит от формы тела).

Окологзвуквой закон подобия для тонких тел

Ранее (см. лекцию 17) мы показали, что потенциальное трансзвуковое течение с малыми возмущениями описывается нелинейным уравнением (плоский случай)

$$(\gamma + 1) \varphi_x \varphi_{xx} = \varphi_{yy}. \quad (22.20)$$

Поэтому решение задачи трансзвукового обтекания не будет столь же простым, как в предыдущих случаях. В связи с этим будет полезной информация, получающаяся из соображений подобия.

Пусть имеем контур тела

$$Y = \tau f\left(\frac{x}{l}\right), \quad \tau \ll l, \quad (22.21)$$

где, как и ранее, l , τ — размеры в направлении x , y .

Запишем граничные условия. На бесконечности $u = w_1$, $v = 0$, т.е. $w_1 = a_*(1 + \varphi_x)$,

$$\varphi_x = \frac{w_1}{a_*} - 1 = \frac{2}{\gamma + 1} (M_1 - 1), \quad \varphi_y = 0. \quad (22.22)$$

На обтекаемом контуре

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mp n_x = \pm Y' = \pm \frac{\tau}{l} f'\left(\frac{x}{l}\right) \quad \text{при } y = 0. \quad (22.23)$$

Сделаем замену переменных

$$x = l \bar{x}, \quad y = l \left(\alpha \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-1/3} \bar{y}, \quad (22.24)$$

$$\varphi = l \alpha^{2/3} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-1/3} \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \alpha = \frac{\tau}{l}.$$

Получим вместо (22.20)

$$2\bar{\varphi}_{\bar{x}} \bar{\varphi}_{\bar{x}\bar{x}} = \bar{\varphi}_{\bar{y}\bar{y}}. \quad (22.25)$$

Граничные условия (22.22), (22.23) принимают вид

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} = \frac{2l(M_1 - 1)}{\gamma + 1} \left[\frac{l \alpha^{2/3}}{\left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{1/3}} \right]^{-1} = \frac{M_1 - 1}{\left(\alpha \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{2/3}} = K, \quad (22.26)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{при } \bar{y} = \infty,$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = \pm \frac{1}{\alpha} \alpha f'(\bar{x}) = \pm f'(\bar{x}) \quad \text{при } \bar{y} = 0. \quad (22.27)$$

Видно, что вся задача (22.25)–(22.27) (при заданной функции $f(x)$) содержит единственный безразмерный постоянный параметр K , называемый *околозвуковым параметром подобия*.

Лекция 23

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

Постановка задачи сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Основные понятия и определения. Принцип независимости от числа Маха. Численные методы решения задач. Краткое изложение метода прямых. Метод установления.

Одним из основных импульсов развития газовой динамики затупленных тел послужили космические исследования, в частности необходимость разработки аэродинамики спускаемых аппаратов. В последующих двух лекциях излагается постановка газодинамической задачи и некоторые общие свойства течений, а также простые приближенные методы расчета сопротивления тел.

Постановка задачи

Рассмотрим короткое тело произвольной формы, помещенное в сверхзвуковой поток. Поскольку возмущения от тела не могут распространяться вверх по сверхзвуковому потоку, область возмущений должна быть отделена от набегающего потока ударной волной.

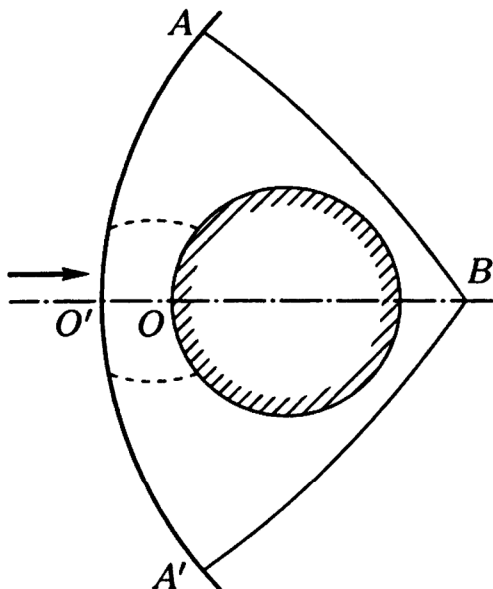


Рис. 23.1. Сверхзвуковое обтекание сферы

Если обтекаемое тело имеет клинообразную (конусообразную) переднюю часть с углом полураствора, меньшим предельного при данном числе Маха, то ударная волна присоединена к носу тела. В противном случае имеем отошедшую ударную волну. В инженерных приложениях часто рассматривается обтекание так называемых затупленных тел с конечным радиусом кривизны в носовой точке. Для таких тел

ударная волна всегда будет отошедшей. Здесь рассматриваются свойства течения в окрестности лобовой части тела.

Итак, область возмущенного течения заключена между отошедшей ударной волной и поверхностью тела (рис. 23.1). В плоском и осесимметричном случаях течение описывается стационарными двумерными уравнениями, которые неоднократно выписывались ранее.

В качестве граничных условий рассматривается условие непроницаемости на поверхности тела

$$w_n = 0. \quad (23.1)$$

Далее, на искривленной в общем случае ударной волне следует задать уже известные нам условия Ренкина–Гюгонио. Отметим, что положение и форма ударной волны заранее не известны и должны быть найдены в процессе решения. Для модели совершенного газа с постоянными теплоемкостями имеем

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{w_{n2}}{w_{n1}} &= \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \varphi - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \end{aligned} \quad (23.2)$$

$$w_{\tau 2} = w_{\tau 1}, \quad w_{n1} = w_1 \sin \varphi, \quad w_{\tau 1} = w_1 \cos \varphi,$$

$$u_2 = w_{n2} \sin \varphi - w_{\tau 2} \cos \varphi, \quad v_2 = -w_{n2} \cos \varphi + w_{\tau 2} \sin \varphi,$$

где u_2, v_2 — декартовы компоненты скорости за ударной волной.

Перейдем к безразмерным переменным, чтобы выявить основные определяющие параметры задачи. В качестве масштабов выбираются следующие величины:

$$\begin{array}{lll} \text{для } x, y & \text{выбираем} & R, \\ \text{для } u, v & \text{—} & w_1, \\ \text{для } \rho & \text{—} & \rho_1, \\ \text{для } p & \text{—} & \rho_1 w_1^2. \end{array} \quad (23.3)$$

Легко убедиться, что уравнения сохраняют исходный вид. Не изменяется также условие на поверхности тела (23.1). Рассмотрим изменение условий на ударной волне. В безразмерных переменных получим

$$\begin{aligned}
 w_{n2} &= \sin \varphi \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varphi} \right), \\
 w_{\tau 2} &= \cos \varphi, \\
 \rho_2 &= \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varphi} \right]^{-1}, \\
 p_2 &= \sin^2 \varphi \left(\frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi} \right).
 \end{aligned} \tag{23.4}$$

Как уже отмечалось, форма ударной волны определяется в процессе решения задачи, и, следовательно зависит также от входящих в постановку задачи параметров.

Итак, при фиксированной форме тела решение зависит от двух безразмерных параметров, γ и M .

Основные понятия и определения

Область возмущенного течения между ударной волной и поверхностью тела называется *ударным* или *сжатым слоем*. Ниже рассматривается частный случай осесимметричного или плоского симметричного течения. На линии симметрии ударная волна ортогональна потоку, так что здесь течение за прямым скачком дозвуковое.

Точка O пересечения линии симметрии с поверхностью тела (см. рис. 23.1) называется *критической точкой*, а отрезок $O'O$ — *линией торможения*. По мере обтекания лобовой части тела газ ускоряется и в некотором месте на каждой линии тока переходит через скорость звука. Геометрическое место этих точек перехода называется *звуковой линией*. На рис. 23.1 она показана штриховыми линиями.

Ниже по потоку от звуковой линии течение сверхзвуковое. В каждой точке сверхзвукового течения возмущения распространяются вниз по потоку в угле, образованном линиями Маха двух разных семейств, проходящими через эту точку. Одна из этих двух линий Маха может в принципе касаться звуковой линии; тогда возмущения из рассматриваемой точки достигнут звуковой линии и повлияют на течение в дозвуковой области. Поэтому вводится понятие *предельной характеристики* — это последняя (считая вниз по потоку) характеристика, имеющая общую точку со звуковой линией. Предельная характеристика служит границей между трансзвуковым и сверхзвуковым течениями в ударном слое.

Принцип независимости от числа Маха

В силу сверхзвукового характера течения за головной ударной волной (в большей ее части) непосредственно на течение вблизи тела влияет лишь часть ударной волны $AO'A'$. Легко себе представить, что при любых числах Маха на $AO'A'$ величина $\sin \varphi$ ограничена снизу, так как $\sin \varphi \rightarrow 0$ лишь асимптотически на больших расстояниях от тела при $M_1 \rightarrow \infty$. Тогда из формул (23.4) видно, что при $M_1 \rightarrow \infty$ величина M_1 исчезает из полной постановки задачи для области $AO'A'B$.

Таким образом, обтекание тел фиксированной формы при больших значениях числа Маха набегающего потока M_1 не зависит от этого параметра. Это правило называют *принципом независимости от числа Маха*. Разумеется, речь идет о введенных здесь безразмерных переменных. В пределе $M_1 \rightarrow \infty$ условия (23.4) превращаются в условия на сильной ударной волне.

Понятие о численных методах расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел

На основании изложенной выше полной постановки задачи сверхзвукового обтекания затупленных тел легко понять, что здесь исследователи имеют дело с одной из самых сложных задач математической физики. Это краевая задача для нелинейных уравнений в частных производных. Дополнительная трудность состоит в том, что часть границы, а именно головная часть ударной волны заранее не известна и должна быть определена в процессе решения. Кроме того, задача по существу является трансзвуковой, т. е. область течения содержит как дозвуковое течение, так и сверхзвуковой поток, в которых закономерности распространения возмущений, формирующих течение, существенно различны. В современной математике не существует точных аналитических методов решения таких задач. Действительно, основной прогресс в решении этой задачи был достигнут с использованием численных методов. Бурное развитие этого научного направления с применением быстро прогрессирующей вычислительной техники относится ко второй половине XX века.

Одно из первых плодотворных направлений носит название *метода интегральных соотношений*. Первая публикация относится к 1957 г. [1]. Позднее направление получило широкое развитие в работах группы ученых, учеников академика О. М. Белоцерковского с использованием всех основных современных моделей сжимаемого газа для широкого класса форм тел, имитирующих основные типы космических спускаемых аппаратов.

Систематическое изложение этих расчетных результатов имеется в коллективной монографии [2].

Другой подход к численному решению этой задачи предложил профессор Г. Ф. Теленин. В мировой литературе метод получил название *метода прямых*. Первая публикация относится к 1964 г. [4]. Как и метод интегральных соотношений, метод прямых применялся позднее для решения широкого круга практических задач ракетно-космической техники. В частности, в 1971 г. метод прямых позволил воспроизвести основные детали газодинамического обтекания спускаемого аппарата сегментально-конической формы, видимые на его лобовой поверхности после приземления.

Результаты применения метода прямых к задачам сверхзвукового обтекания тел с явным учетом основных эффектов высокотемпературных газовых смесей приведены в монографии [22].

Дадим здесь краткое изложение метода прямых на примере обтекания сферического затупления. Вначале система уравнений газовой динамики записывается в сферической системе координат с полюсом в центре сферы. Затем область между отошедшей ударной волной и поверхностью тела (ударный слой) преобразуется в полосу путем перехода от сферических координат (r, θ, φ) к новым переменным (ξ, θ, φ) :

$$\xi = \frac{r - r_b(\theta)}{r_s(\theta) - r_b(\theta)} = \frac{r - r_b(\theta)}{\varepsilon(\theta)}. \quad (23.5)$$

В силу осевой симметрии решение от φ не зависит. Здесь $r_b(\theta)$, $r_s(\theta)$ — меридиональные сечения тела и ударной волны соответственно. Описанные выше граничные условия (23.1), (23.2) (или (23.4)) формулируются теперь при $\xi = 1$ (ударная волна) и при $\xi = 0$ (поверхность тела).

Метод решения состоит в следующем. В верхней части меридиональной плоскости проводятся n лучей $\theta = \text{const}$. Все искомые функции аппроксимируются по их значениям на лучах в виде полиномов степени $2n$ для четных функций и степени $2n + 1$ для нечетной функции v (здесь u, v — радиальная и окружная компоненты скорости)

$$f = \sum_{j=0}^n f_j^0(\xi) \theta^{2j}, \quad v = \sum_{j=0}^n v_j^0(\xi) \theta^{2j+1}. \quad (23.6)$$

Эти аппроксимации позволяют выразить производные искомых функций по θ через значения функций на лучах. Эти выражения затем подставляются в исходную систему уравнений, которая после этого принимает вид системы обыкновенных

дифференциальных уравнений для значений функций на лучах. В частном случае трехлучевой схемы ($n = 2$) система для модели совершенного газа принимает вид:

вдоль оси симметрии

$$u_\xi = -\frac{p_\xi}{\rho u}, \quad v_{0\xi} = -\frac{\xi \varepsilon''}{1 + \xi \varepsilon} u_\xi - \frac{a}{u} \left[\frac{p''}{\rho} + v_0(v_0 + u) \right], \quad (23.7)$$

$$p_\xi = \frac{2au\gamma p\rho(u + v_0)}{\gamma p - \rho u^2}, \quad \rho_\xi = \frac{\rho}{\gamma p} p_\xi;$$

вдоль первого и второго лучей

$$u_\xi = \frac{1}{A} \left[-\frac{p_\xi}{\rho} + av(v + u') \right],$$

$$v_\xi = \frac{1}{A} \left[-\frac{ap'}{\rho} + \frac{bp_\xi}{\rho} - av(v' + u) \right],$$

$$p_\xi = \frac{a}{\Delta} \left\{ \gamma p \left[v(v - u') + u(v' + 2u + v \operatorname{ctg} \theta) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - b \left(uv + v^2 \operatorname{ctg} \theta - \frac{p'}{\rho} \right) \right] + Avp' \right\}, \quad (23.8)$$

$$\rho_\xi = \frac{\rho}{\gamma p} \left[p_\xi + \frac{av}{A} \left(p' - \frac{\gamma p}{\rho} \rho' \right) \right],$$

$$a = \frac{\varepsilon}{1 + \xi \varepsilon}, \quad b = \frac{\xi \varepsilon'}{1 + \xi \varepsilon}, \quad A = u - bv,$$

$$\Delta = \frac{\gamma p}{\rho} (1 + b^2) - A^2, \quad v_0 = \left. \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}.$$

В формулах (23.7), (23.8) выражения f_ξ и f' обозначают производные по ξ и θ соответственно. Уравнение ударной волны также задается в виде полинома, содержащего три неизвестных параметра, в качестве которых можно принять величины отхода ударной волны вдоль трех лучей:

$$r_s = \sum_{j=0}^2 r_j^0 \theta^{2j}. \quad (23.9)$$

В силу постановки граничных условий для уравнений (23.7), (23.8) получаем краевую задачу, которая решается методом

пристрелки. Метод состоит в подборе неизвестных координат ударной волны на лучах путем удовлетворения условия непроницаемости в точках пересечения лучей с поверхностью обтекаемого тела. На каждом этапе пристрелки решаются обыкновенные дифференциальные уравнения (23.7), (23.8).

С ростом эффективности вычислительной техники основным методом решения обсуждаемых задач становится *метод установления* в различных вариантах. Идея метода состоит в решении нестационарных уравнений и нахождении искомого стационарного течения как предела при больших значениях времени. Преимущество состоит в том, что при таком подходе решаются уравнения гиперболического типа, для которых легче выполнить условия устойчивости. Существуют многочисленные реализации идеи установления; основное их различие состоит в способах аппроксимации уравнений во внутренних точках. Одной из наиболее распространенных является схема Мак-Кормака, опубликованная в 1969 г. [28] (см. также [29]).

Лекция 24

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ

Сопротивление затупленных тел в сверхзвуковом потоке. Формула Рэля для давления в критической точке. Формула Ньютона для давления на лобовой части тела. Формула Буземана. Закон подобия для течения в окрестности линии торможения.

Здесь приводятся простые формулы для описания главных элементов течения газа около головной части затупленного тела. Часть этих формул основана на точных свойствах сверхзвуковых течений, другие носят приближенный характер и получены из общих закономерностей либо на основе численных решений.

Формула Рэля

Вычислим давление в критической точке затупленного тела. Эта величина формируется в результате перехода набегающего потока через прямой скачок на оси симметрии и последующего адиабатического торможения до нулевой скорости.

Вначале получим значение числа Маха за прямым скачком. Из формул (23.2) при $\varphi = \pi/2$ имеем

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2 p_1}{v_1 p_2} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \frac{1}{M_1^2}. \quad (24.1)$$

Согласно последней формуле (23.4) безразмерное давление за прямым скачком равно

$$p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\gamma M_1^2}. \quad (24.2)$$

Чтобы вычислить давление в критической точке, запишем условие адиабатического сжатия вдоль осевой линии тока в ударном слое:

$$\frac{p_0}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (24.3)$$

Объединяя формулы (24.1), (24.2) и (24.3), получим *формулу Рэлея* для давления в критической точке, отнесенного к $\rho_1 w_1^2$:

$$p_0 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{\gamma M_1^2} \right) \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (24.4)$$

После несложных преобразований формулу можно записать так:

$$p_0 = \frac{1}{\gamma M_1^2} \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (24.5)$$

Отсюда получим следующие предельные значения:

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} p_0 = \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}, \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 1} p_0 = 1.$$

Формула Ньютона

Как уже говорилось, вычисление сил, действующих со стороны потока газа на обтекаемое тело, является одной из основных задач аэродинамики. Здесь большое значение имеют простые приближенные соотношения, позволяющие быстро оценить величину сил.

Первый большой результат в этой области был получен Исааком Ньютоном. Считалось, что среда состоит из отдельных тождественных частиц, равномерно распределенных в пространстве и не взаимодействующих между собой. Вводится следующая модель взаимодействия этой среды с поверхностью тела: при встрече с элементом поверхности происходит абсолютно неупругий удар, при этом частица полностью передает телу нормальную к поверхности составляющую импульса, а сама скользит вдоль поверхности со скоростью, равной касательной составляющей (заметим сразу, что эта схема напоминает поведение газа при переходе через сильную косую ударную волну).

Такая схема уже легко позволяет подсчитать сопротивление тела. Вычислим давление. Сила воздействия среды на элемент поверхности тела ΔS равна изменению количества движения ΔP . За единицу времени с элементом ΔS сталкивается масса

$$\Delta M = \rho_1 w_1 \Delta S \sin \alpha,$$

где α — угол наклона элемента поверхности тела к набегающему потоку, т. е. угол между вектором скорости и касательной к поверхности тела в данной точке. Тогда

$$\Delta P = w_1 \sin \alpha \Delta M = \rho_1 w_1^2 \Delta S \sin^2 \alpha.$$

Формула для давления имеет вид

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S} = \rho_1 w_1^2 \sin^2 \alpha. \quad (24.6)$$

Полная сила сопротивления получается интегрированием соотношения (24.6) по всей «атакующей» ($\alpha > 0$) части поверхности тела. Описанный подход совсем не позволяет вычислить давление в «аэродинамической тени».

Сравним приведенную здесь схему расчета и *формулу Ньютона* (24.6) с точным решением уравнений газовой динамики на примере обтекания клина (течение с косым скачком). Угол скачка на клине определялся с помощью гипоциклоиды, которая при $M_1 \rightarrow \infty$ переходит в окружность с центром и радиусом соответственно

$$O_1\left(\frac{\gamma}{\gamma+1} w_1, 0\right), \quad R = \frac{w_1}{\gamma+1}.$$

Если $\gamma \rightarrow 1$, то радиус $R \rightarrow w_1/2$ и становится равным абсциссе центра окружности, т. е. окружность касается оси ординат. Из способа построения скачка следует, что в этом пределе углы клина и скачка совпадают, т. е. скачок лежит на клине. Газ, пройдя скачок, движется вдоль клина в бесконечно тонком слое (так как касательная составляющая скорости на скачке сохраняется). Вычислим давление:

$$\frac{p}{\rho_1 w_1^2} = \sin^2 \alpha \left(\frac{2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\gamma M_1^2 \sin^2 \alpha} \right) \Big|_{M_1 \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 1} \rightarrow \sin^2 \alpha, \quad (24.7)$$

т. е. для давления в точности получаем формулу Ньютона. Итак, схема Ньютона является асимптотическим решением уравнений газовой динамики при $M_1 \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$.

Формула Буземана

Схема Ньютона хорошо описывает переход газа через ударную волну, в частности давление за ударной волной. Всегда ли эта схема будет пригодна для описания взаимодействия газа с телом и для распределения давления на теле? Легко себе представить, что при обтекании криволинейной поверхности на

конечную массу газа, движущуюся по криволинейной траектории между телом и ударной волной, действует конечная же центробежная сила, которая должна быть уравновешена конечным перепадом давления. Формула Ньютона дает давление непосредственно за ударной волной, так что давление на теле должно отличаться от величины, даваемой формулой (24.6). На клине это отличие равно нулю.

Вычислим искомый перепад давления. Рассматриваем плоское или осесимметричное течение. Условие равенства перепада давления центробежной силе ΔF , действующей на элемент объема газа $\Delta n \Delta x l(x)$ ($l(x) = 1$ — плоское течение; $l(x) = 2\pi r(x)$ — осесимметричное течение), имеет вид (рис. 24.1)

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{l(x) \Delta x} = \frac{\rho(x, x') \Delta n u^2(x')}{R(x)}. \quad (24.8)$$

Здесь x, x' — продольные координаты изучаемого объема и входа в ударный слой струйки газа, содержащей изучаемый объем

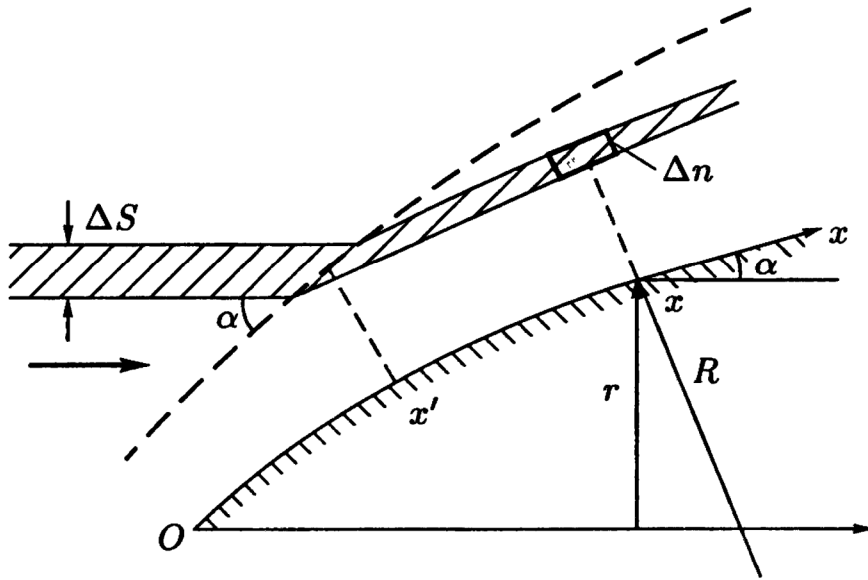


Рис. 24.1. Вывод формулы Буземана

соответственно, R — радиус кривизны поверхности тела. Скорость газа в струйке считается постоянной.

Условие сохранения массы дает

$$\rho_1 w_1 \Delta S(x') = \rho(x, x') u(x') l(x) \Delta n. \quad (24.9)$$

Здесь S — площадь поперечного сечения тела ($S = r$ — плоское течение; $S = \pi r^2$ — осесимметричное течение). Выразим радиус

кривизны R через угол α касательной к образующей тела с набегающим потоком:

$$\frac{1}{R(x)} = -\frac{d\alpha}{dx} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{dr} = -\sin \alpha(x) \left. \frac{d\alpha}{dS} \right|_x l(x). \quad (24.10)$$

Условие сохранения касательной скорости на ударной волне дает

$$u(x') = w_1 \cos \alpha(x'). \quad (24.11)$$

Подставляя (24.9)–(24.11) в (24.8), получим

$$\Delta p = -\rho_1 w_1^2 \sin \alpha(x) \left. \frac{d\alpha}{dS} \right|_x \cos \alpha(x') \Delta S(x'). \quad (24.12)$$

Заменяя приращения дифференциалами и интегрируя от осевой линии тока до линии тока, втекающей в ударный слой в исследуемом сечении, получим

$$p_s - p_b = -\rho_1 w_1^2 \sin \alpha \int_0^S \cos \alpha dS. \quad (24.13)$$

При обтекании выпуклого тела, у которого $d\alpha/dS < 0$, давление за ударной волной p_s превышает давление на поверхности тела p_b . Используя для p_s формулу Ньютона, окончательно получим

$$p_b = \rho_1 w_1^2 \left(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \frac{d\alpha}{dS} \int_0^S \cos \alpha dS \right). \quad (24.14)$$

Имеем *формулу Буземана*, учитывающую центробежную силу, действующую на газ при обтекании криволинейной поверхности. Здесь давление в каждой точке поверхности тела зависит от ее формы выше по течению.

Закон подобия для течения вблизи линии торможения

Как уже отмечалось выше, теория Ньютона хорошо описывает свойства реального потока непосредственно за ударной волной, поэтому в (24.6) должна фактически входить форма ударной волны. Естественно предположить, что и вне условий применимости предельного подхода характеристики ударной волны могут служить масштабами течения во всем ударном слое.

Справедлив следующий приближенный закон подобия течений.

Если за характерный размер задачи принять радиус кривизны ударной волны на оси симметрии R_s , то свойства течения газа в дозвуковой области ударного слоя зависят от двух безразмерных параметров: максимального сжатия газа в ударном слое k и времени релаксации τ .

При обтекании равновесным и совершенным газом максимальное сжатие равно отношению плотностей в прямом скачке $k = \rho_\infty / \rho_s$. В случае неизотермического течения в осевой части ударного слоя, как при наличии неравновесных процессов или излучения, плотность газа может меняться значительно, поэтому максимальное сжатие равно

$$k = \left(\int_0^1 \frac{\rho}{\rho_\infty} d\xi \right)^{-1}. \quad (24.15)$$

Если в неравновесном течении имеется несколько процессов с различными скоростями протекания, необходимо ввести несколько параметров τ_i .

Рассмотрим некоторые следствия.

Следствие 1. Отношение отхода ударной волны ε к радиусу кривизны скачка R_s будет универсальной функцией сжатия k .

В работе автора [21] приведены многочисленные сравнения этого правила с результатами точных численных расчетов. Эти результаты в координатах ε / R_s , k имеют вид узкой полосы, аппроксимируемой формулой

$$\frac{\varepsilon}{R_s} = \frac{k}{1 + \sqrt{8k/3}}. \quad (24.16)$$

Следствие 2. Форма ударной волны в дозвуковой области ударного слоя удовлетворительно аппроксимируется окружностью радиуса R_s .

Важным параметром для расчета течения и теплообмена в дозвуковой части ударного слоя служит так называемая скорость растекания газа в критической точке dv/ds , где s — координата вдоль поверхности тела. Эта величина связана с характеристиками давления в окрестности критической точки следующим образом:

$$\left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = -\frac{2p_1}{\rho_0}, \quad p = p_0 + p_1 s^2.$$

Для всех перечисленных выше течений справедливо

Следствие 3. *Безразмерная комбинация*

$$\mu = \frac{R_s^2 p_1}{\rho_\infty} V_\infty^2$$

будет универсальной функцией сжатия.

При очень большой скорости обтекания существенную роль за головной ударной волной играют физико-химические превращения в газе. На модели бинарной смеси было видно, что даже если компоненты остаются совершенными газами, уравнение состояния выражается весьма сложными функциями независимых термодинамических переменных. Они еще усложняются для газовых смесей с большим числом компонент. Выберем в качестве независимых термодинамических переменных p и T . Из условий на ударной волне исключим компоненты скорости, и получим два условия для термодинамических переменных в следующем виде:

$$\begin{aligned} p - \frac{1}{\gamma M^2} &= \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \sin^2 \varphi, \\ h - \frac{1}{(\gamma - 1)M^2} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Задавая $h = h(p, T)$, $\rho = \rho(p, T)$ (или $h = h(p, \rho)$), получим два уравнения для определения p и T за ударной волной.

Используя закон подобия, решение можно существенно упростить. Так как течение определяется в основном сжатием газа в прямом скачке, можно расчет обтекания тела равновесной газовой смесью заменить расчетом обтекания совершенным газом со специально подобранным значением показателя адиабаты γ^* . А именно, эта величина должна обеспечить сжатие в прямом скачке, равное этой величине при обтекании реальным газом с условиями на скачке (24.17). Если число Маха $M \gg 1$, то условие для выбора γ^* имеет простой вид

$$k = \frac{\gamma^* - 1}{\gamma^* + 1}, \quad \gamma^* = \frac{1 + k}{1 - k}, \quad (24.18)$$

где k определяется из уравнений (24.17). В реальном газе сжатие в прямом скачке может быть значительно более сильным, чем в совершенном газе при $\gamma = 1.4$ (т. е. $k = 1/6$). Из второй формулы (24.18) следует, что в этом случае γ^* может быть достаточно близким к единице.

Лекция 25

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ УДЛИНЕННЫХ ТЕЛ

Анализ порядков возмущений для тонкого тела в гиперзвуковом потоке. Закон подобия при обтекании тонких тел потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Закон плоских сечений.

Заключительная лекция содержит элементы газовой динамики тонких тел. Приведенные ниже результаты основаны на асимптотическом анализе постановок задач в пределе больших чисел Маха.

Анализ порядков возмущений для тонкого тела в гиперзвуковом потоке

Рассмотрим движение тонкого, заостренного впереди тела в газе с большой сверхзвуковой скоростью V . Начало системы координат (точка O) поместим в переднюю точку тела, ось Ox — вдоль набегающего потока, оси Oy , Oz — в поперечной плоскости. Будем считать тело тонким и достаточно гладким, так что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\cos(n, x) &\approx \tau, & \cos(n, y) &\approx 1, \\ \cos(n, z) &\approx 1, & \tau &\ll 1,\end{aligned}\tag{25.1}$$

где $\cos(n, x)$ и т. д. означает косинус угла между нормалью n к поверхности тела и соответствующей осью координат.

Из условия непроницаемости на теле

$$v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = -(V + u) \cos(n, x)\tag{25.2}$$

и оценок (25.1) для области вблизи поверхности тела получим

$$v \approx w \approx \tau(V + u) \approx \tau V.\tag{25.3}$$

Здесь u , v , w — компоненты скорости возмущенного движения газа, вызванного движением тонкого тела в покоящемся газе.

Естественно предположить, что оценки (25.3) сохраняются внутри всей области возмущенного движения. Прочие параметры оценим из условий на ударной волне. Для проведения этих

дополнительных оценок используем соотношения на косой ударной волне.

Будем считать течение осесимметричным, и рассмотрим его сечение меридиональной плоскостью Oxy . Условия на нормальную и касательную к скачку компоненты скорости для совершенного газа имеют вид

$$\frac{v_x - v_y \operatorname{ctg} \varphi}{V} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \varphi}, \quad V = v_x + v_y \operatorname{tg} \varphi. \quad (25.4)$$

Здесь φ — угол скачка, v_x , v_y — x -, y -компоненты скорости газа относительно скачка. Из второго выражения (25.4) получим формулу для модуля абсолютной скорости газа за скачком V_2 :

$$V_2^2 = (V - v_x)^2 + v_y^2 = v_y^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + v_y^2 = \frac{v_y^2}{\cos^2 \varphi}. \quad (25.5)$$

Учитывая оценку (25.3), из последнего соотношения получим $V_2/V \approx \tau$, так как $\cos \varphi \approx 1$ ($\cos \varphi$ не может быть малой величиной).

Исключая v_x из (25.4), получим соотношение

$$\frac{v_y}{V \cos \varphi} = \frac{V_2}{V} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 \sin^2 \varphi - 1}{M_1^2 \sin \varphi}. \quad (25.6)$$

Используем его для оценки угла ударной волны φ с набегающим потоком. Решая квадратное уравнение (25.6) относительно $M_1 \sin \varphi$, получим формулу

$$M_1 \sin \varphi = \frac{\gamma + 1}{4} \frac{V_2}{a_1} + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 \left(\frac{V_2}{a_1}\right)^2 + 1}.$$

Отсюда получим оценку угла φ :

$$M_1 \sin \varphi \approx \frac{V_2}{a_1} + 1, \quad \sin \varphi \approx \frac{V_2}{V} + \frac{1}{M_1} \approx \tau + \frac{1}{M_1}.$$

Получим теперь оценку величины u . Из второго выражения (25.4) и (25.5) имеем

$$\frac{V - v_x}{V} \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{V_2}{V}, \quad u = V - v_x = V_2 \sin \varphi \approx V \tau \left(\tau + \frac{1}{M_1} \right). \quad (25.7)$$

Аналогично, используя формулы для изменений давления и плотности на косой ударной волне и оценку для $\sin \varphi$, получим оценки для этих изменений:

$$\Delta p = p - p_1 \approx \rho_1 V^2 \tau^2 \left(1 + \frac{1}{M_1 \tau} \right), \quad (25.8)$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} \approx \frac{M_1 \tau}{M_1 \tau + 1}.$$

Для формы ударной волны получаем следующие оценки:

$$\cos(n_s, x) = \sin \varphi \approx \tau \left(1 + \frac{1}{M_1 \tau} \right), \quad (25.9)$$

$$\cos(n_s, y) \approx \cos(n_s, z) \approx 1.$$

Формулы (25.1), (25.3), (25.7), (25.8), (25.9) дают полное представление о характере возмущений, вызываемых тонким телом в сверхзвуковом потоке.

Уместно рассмотреть два случая.

1. Если $M_1 \approx 1$, то

$$u \approx a_1 \tau, \quad v \approx w \approx V \tau, \quad \frac{\Delta p}{p_1} \approx M_1 \tau, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \approx M_1 \tau, \quad (25.10)$$

т.е. все возмущения малы, и можно применять линейную теорию.

2. Если $M_1 \gg 1$, так что $M_1 \tau \approx 1$ или $M_1 \tau \gg 1$, то

$$u \approx V \tau^2, \quad v \approx w \approx V \tau, \quad \frac{\Delta p}{p_1} \approx M_1^2 \tau^2, \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \approx 1. \quad (25.11)$$

При $M_1 \approx 1$ $\cos(n_s, x) \approx 1/M_1$, а при $M_1 \gg 1$ ($M_1 \tau \approx 1$ или $M_1 \tau \gg 1$) $\cos(n_s, x) \approx \tau$. Во-первых, возмущение продольной скорости — малая более высокого порядка, чем возмущения поперечных скоростей. Во-вторых, возмущения давления и плотности не малы.

Таким образом, при очень больших скоростях обтекания тонких тел следует применять нелинейную теорию.

Закон подобия при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью

Рассмотрим обтекание тонких аффинно подобных тел, задаваемых уравнением (в безразмерных независимых переменных, отнесенных к продольной длине)

$$F\left(x, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = 0. \quad (25.12)$$

Система координат связана с телом. Полная система уравнений газовой динамики в этой системе запишется так:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho(V+u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\
 (V+u) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 (V+u) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\
 (V+u) \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\
 (V+u) \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial x} + v \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial y} + w \frac{\partial(p/\rho^\gamma)}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{25.13}$$

Если теперь записать полные граничные условия на теле и на ударной волне и привести все соотношения к безразмерным независимым переменным, выбирая в качестве масштабов условия в набегающем потоке, то получится, что вся постановка задачи содержит три безразмерных определяющих параметра: γ , M_1 и τ .

Учитывая оценки параметров возмущенного течения при обтекании тонких тел гиперзвуковым потоком (25.11), проведем следующую замену переменных в уравнениях (25.13) и в соответствующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 u &= V\tau^2 u', \quad v = V\tau v', \quad w = V\tau w', \quad p = \gamma M_1^2 \tau^2 p_1 p', \\
 \rho &= \rho_1 \rho', \quad x = x', \quad y = \tau y', \quad z = \tau z'.
 \end{aligned} \tag{25.14}$$

Подставляя (25.14) в исходные уравнения (25.13) и отбрасывая члены порядка τ^2 , получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho'}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' w')}{\partial z'} &= 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} = 0, \\
 \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} &= 0, \\
 \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial z'} &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{p'}{\rho'^\gamma} \right) + v' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{p'}{\rho'^\gamma} \right) + w' \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{p'}{\rho'^\gamma} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{25.15}$$

Подставляя (25.14) в граничные условия на ударной волне и отбрасывая члены порядка τ^2 , получим, что эти условия совсем не содержат определяющих параметров M_1 и τ . Это же относится к условиям на поверхности тела и на возможных внутренних разрывах.

Условия в набегающем потоке, т. е. перед головным скачком, запишутся в новых переменных так:

$$u' = v' = w' = 0, \quad \rho' = 1, \quad p' = \frac{1}{\gamma M_1^2 \tau^2}. \quad (25.16)$$

Отсюда следует, что определяющие параметры задачи M_1 и τ для тонких тел входят в постановку задачи лишь в произведении $M_1 \tau$. Параметр $M_1 \tau$ называется *параметром подобия* при обтекании тонких тел с большой сверхзвуковой скоростью.

Указанный закон подобия удобно использовать в эксперименте. Пусть требуется изучить обтекание тонкого тела при большом значении M_1 . Тогда можно поставить эксперимент для более толстого (аффинно подобного) тела при $M_2 < M_1$, причем отношение характерных толщин натуре и модели должно равняться M_2/M_1 .

Данный закон подобия, разумеется, не противоречит принципу независимости от числа Маха. При фиксированном τ и $M_1 \rightarrow \infty$ картина течения стремится к предельному состоянию (напомним, что это относится к переменным, отличающимся от (25.14)).

Закон плоских сечений при обтекании тонких тел

Вернемся к размерным переменным в первом, третьем, четвертом и пятом уравнениях из (25.15). Получим

$$\begin{aligned} V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ V \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ V \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (25.17)$$

Если положить $t = x/V$, то получим систему уравнений плоского нестационарного движения газа. Аналогичное относится к приближенным соотношениям на ударной волне. Условие на поверхности тела принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (25.18)$$

Его можно рассматривать как результат вытеснения газа поршнем, движущимся в плоскости (y, z) по закону

$$F \left(Vt, \frac{y}{\tau}, \frac{z}{\tau} \right) = 0. \quad (25.19)$$

Соотношение (25.19) задает в каждый момент времени t форму поверхности поршня $y = y_w(z)$ в неявном виде.

Иначе говоря, задача о стационарном обтекании тонкого тела потоком с большой сверхзвуковой скоростью эквивалентна (с точностью до величин $\approx \tau^2$) задаче о нестационарном разлете (вытеснении) газа.

Разумеется, указанное правило, называемое *законом плоских сечений*, непосредственно следует из приведенных выше оценок, где было показано, что при большой скорости обтекания относительное продольное смещение частиц газа — малая более высокого порядка по сравнению с поперечными смещениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О. М. Обтекание кругового цилиндра с отошедшей ударной волной // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 3. С. 509–512.
2. Белоцерковский О. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. — М.: Вычислительный центр АН СССР, 1967. — 400 с.
3. Брей К. Н. Ч. Рекомбинация атомов в соплах гиперзвуковых аэродинамических труб // Гидродинамика и теплообмен при наличии химических реакций. — М.: ИЛ, 1962. — С. 488–529.
4. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 9–28.
5. Годунов С. К. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
6. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. — М.: ИЛ, 1960. — 422 с.
7. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 456 с.
8. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. Теория детонации. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 268 с.
9. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. — М.: Мир, 1967. — 566 с.
10. Компанеец А. С. Теоретическая физика. — М.: Гостехиздат, 1957. — 564 с.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Часть II. — М.: Физматгиз, 1963. — 728 с.
12. Лайтхилл М. Динамика диссоциирующего газа // Вопросы ракетной техники. — 1957. — № 5, 6.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика — М.: Наука, 1986. — 608 с.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 796 с.
15. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. — М.: Наука, 1977. — 336 с.
16. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975. — 328 с.

17. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981. — 368 с.
18. *Пирумов У. Г., Росляков Г. С.* Течения газа в соплах. — М.: Изд-во МГУ, 1978. — 352 с.
19. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 328 с.
20. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. I, II. — М.: Наука, 1976. — 536 с., 574 с.
21. *Стулов В. П.* О законе подобия при сверхзвуковом обтекании затупленных тел // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — № 4. — С. 68–75.
22. *Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И.* Аэродинамика болидов. — М.: Наука, 1995. — 236 с.
23. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. — М.: Наука, 1965. — 484 с.
24. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 622 с.
25. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях. — М.: Гостехиздат, 1949. — 142 с.
26. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. — М.: Наука, 1988. — 424 с.
27. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959. — 220 с.
28. *MacCormac R. W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper 69–35. — 1969.
29. *MacCormac R. W., Warming R. F.* Survey of computational methods for three-dimensional supersonic inviscid flows with shocks // AGARD Lecture series. № 64. On Advances in Numerical Fluid Dynamics. — 1973. — P. 5-1–5-20.

Учебное издание

СТУЛОВ Владимир Петрович

ЛЕКЦИИ ПО ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*

Компьютерный набор автора

Компьютерная верстка: *В.В. Худяков*

Оформление переплета *А.Ю. АLEXИНОЙ*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 14.11.03.
Формат 60х90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 12. Заказ № 127.

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15



СТУЛОВ Владимир Петрович

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэромеханики и газовой динамики МГУ им. М.В. Ломоносова, главный научный сотрудник Института механики МГУ. С 1977 г. читает лекции по газовой динамике для студентов механико-математического факультета МГУ.

Основное содержание учебника представляет собой изложение методов и результатов исследования одномерных стационарных и нестационарных течений, двумерных стационарных течений и задач внешней аэродинамики. Значительное внимание уделяется демонстрации эффектов релаксации внутренних степеней свободы молекул газа. Большинство решаемых задач доведены до конечного результата, поэтому внимательный читатель может приобрести простые инструменты для новых исследований.

Газовая динамика широко применяется в разнообразных областях человеческой деятельности:

- авиация и ракетная техника;
- космические исследования;
- физика метеорных явлений;
- газодинамические лазеры;
- астрофизика звездных скоплений, строение Вселенной;
- медицина.

ISBN 5-9221-0212-3



9 785922 102124 >